Lyhyen matematiikan simuloitu YO-koe 1

Vastaa korkeintaan neljään tehtävään. Kirjoita jokaisen tehtävän vastaus selvällä käsialalla ja riittävin sanallisin perustein.

1. **a)** Ratkaise yhtälö $\frac{x(x-1)}{3} + 4 = 12$

b) Sievennä polynomilauseke

$$\frac{x^2-1}{x+1} + \frac{x+1}{x^2+2x+1}$$

c) Kumpi luvuista $\sqrt{2}$ ja $\frac{3}{2}$ on suurempi? Perustele vastauksesi ilman likiarvoja.

2. **a)** Ratkaise yhtälö $\sqrt{2x} = \frac{3(\sqrt{x}+1)}{4}$

b) Aritmeettisen lukujonon ensimmäinen termi on 5 ja suhdeluku 3. Laske jonon seitsemän ensimmäisen termin keskiarvo ja mediaani sekä vastaavan aritmeettisen sarjan summa (sarjan, jossa on seitsemän termiä).

c) Derivoi funktio

$$f(x) = 51x^4 + 12x^2 - 2x + 3$$

Laske myös derivaattafunktion $f'(x)$ arvo pisteessä $x = 1$.

3. Markku lyö 500 € vetoa Sannan kanssa siitä, että kahta noppaa heitettäessä tulee vähintään yhden kerran viisi tai kuusi. Millä todennäköisyydellä Markku voittaa vedon? Millä todennäköisyydellä Markku voittaa vedon kaksi kertaa peräkkäin, jos Sanna vaatii uusinnan ensimmäisen tappionsa jälkeen?

4. **a)** Suora kulkee origon sekä pisteen $(3, -4)$ kautta. Määritä suoran yhtälö muodossa

$$y = kx + b$$

Kuinka paljon suoran vakiotermiä tulee muuttaa, jotta suora kulkisi pisteen $(3, -4)$ sijaan pisteen $(3, 0)$ kautta?

b) Tasakylkisen kolmion piiriksi on mitattu 22 metriä ja samanpituisten sivujen välisen kolmion kärjen ja kannan välinen korkeus on 8 metriä. Laske kolmion kulmien suuruudet 0,1 asteen tarkkuudella.

5. Alkoholijuoman hinta 10 € koostuu tuotantokustannuksista ja alkoholiverosta. Tuotantokustannusten osuus on 75 % ja veron 25 %. Runsaan juopumisen estämiseksi hallitus päättää korottaa alkoholiveroa 50 %. Samalla tulvat Keski-euroopassa pilaavat viinisadot, ja tuotantokustannukset nousevat kolmanneksella aiempaan verrattuna. Kuinka paljon juoma maksaa tapahtumien jälkeen baarissa, joka myy tuotetta happy hourin aikaan 10 %:n alennuksella?

6. Erikoisvalmisteinen pallo, jonka ulkohalkaisija on 41 mm, on valmistettu sisä- ja kuorimateriaalista. Kuoren paksuus on 3 mm. Kuinka suuri on pallon massa, jos kuoriaineen tiheys on noin 2500 $\mathrm{kg/m^3}$ ja sisäaineen 2100 $\mathrm{kg/m^3}$?

7. Kaksi suoraa leikkaavat pisteessä $(1, 3)$. Ensimmäisen suoran kulmakerroin on 2 ja toisen -4. Määritä suorien yhtälöt muodossa $Ax + By + C = 0$, missä $A,\ B$ ja C ovat vakiolukuja.

LYHYEN MATEMATIIKAN SIMULOITU YO-KOE 1 RATKAISUT

1. **a)** Yhtälöä hieman muokkaamalla saamme sen toisen asteen yhtälön perusmuotoon:

$$\begin{aligned} \frac{x^2-x}{3}+4&=12 \qquad \Big| \cdot 3 \\ x^2-x+12&=36 \\ \Rightarrow x^2-x-24&=0 \end{aligned} \tag{1}$$

Sijoittamalla edellinen toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaan antaa

$$\begin{aligned} x&=\frac{1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-24)}}{2} \\ &=\frac{1\pm\sqrt{97}}{2} \end{aligned} \tag{2}$$

Yhtälön ratkaisut ovat $x_{\oplus}=\frac{1+\sqrt{97}}{2}$ ja $x_{\ominus}=\frac{1-\sqrt{97}}{2}$.

b) Sievennetään lauseketta muistikaavojen ja algebrallisten sääntöjen avulla:

$$\begin{aligned} \frac{x^2-1}{x+1}+\frac{x+1}{x^2+2x+1}&=\frac{(x+1)(x-1)}{x+1}+\frac{x+1}{(x+1)^2} \\ &=x-1+\frac{1}{x+1} \\ &=\frac{(x-1)(x+1)+1}{x+1} \\ &=\frac{x^2-1+1}{x+1} \\ &=\frac{x^2}{x+1} \end{aligned} \tag{3}$$

Yhtälön (3) viimeisellä rivillä olevaa muotoa ei enää saa siistimpään muotoon.

c) Arvioidaan seuraavasti:

$$\frac{3}{2}=\sqrt{\frac{9}{4}}>\sqrt{\frac{8}{4}}=\sqrt{2}, \tag{4}$$

eli $\frac{3}{2}>\sqrt{2}$.

2. **a)** Käytetään algebrallisia menetelmiä yhtälön muokkaamiseksi sopivaan muotoon:

$$\begin{aligned} \sqrt{2x}&=\frac{3(\sqrt{x}+1)}{4} \qquad \Big| \cdot 4 \\ 4\sqrt{2}\sqrt{x}&=3\sqrt{x}+3 \\ (4\sqrt{2}-3)\sqrt{x}&=3 \\ \sqrt{x}&=\frac{3}{4\sqrt{2}-3} \end{aligned} \tag{5}$$

Yhtälön (5) viimeisestä muodosta saamme muuttujan ratkaistua korottamalla yhtälön molemmat puolet toiseen potenssiin:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x} &= \frac{3}{4\sqrt{2}-3} \qquad \Big|()^2 \\
x &= \frac{9}{(4\sqrt{2}-3)^2} \\
&= \frac{9}{16\cdot 2 - 4\cdot 3\cdot 2\sqrt{2}+9} \\
&= \frac{9}{41-24\sqrt{2}}
\end{aligned} \tag{6}
$$

Loppuvastaus on melko monimutkainen, mutta tämäntyyppisessä matemaattisessa tehtävässä se tulee antaa ks. muodossa.

b) Aritmeettinen lukujono etenee säännön $a_1,\ a_1+d,\ a_1+2d,\ldots$ mukaan, missä a_1 on jonon ensimmäinen termi ja d on jonon jäsenten välimatka eli suhdeluku. Tehtävän tapauksessa tämä tarkoittaa jonoa $5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, \ldots$ (seitsemän ensimmäistä termiä mainittu, jono jatkuu periaatteessa äärettömiin). Seitsemän ensimmäisen jäsenen keskiarvo $\bar{a}$ saadaan laskemalla jonon jäsenten summa ja jakamalla jäsenten määrällä:

$$
\bar{a} = \frac{5+8+11+14+17+20+23}{7} = \frac{98}{7} = 14 \tag{7}
$$

Mediaani on seitsemän jonon jäsenen muodostaman joukon keskimmäinen luku suuruusjärjestyksessä pienimmästä suurimpaan eli 14 (huomaa, että keskiarvo ja mediaani antavat saman tuloksen). Aritmeettisen sarjan summa tarkoittaa jonon jäsenten summaamista yhteen, jonka teimme jo keskiarvoa laskiessa: tulos on 98.

c) Derivoidaan funktio käyttämällä polynomin derivointikaavaa:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}f(x) &= \frac{d}{dx}\left[51x^4+12x^2-2x+3\right] \\
&= 51\cdot 4x^3 + 12\cdot 2x - 2 + 0 \\
&= 204x^3 + 24x - 2
\end{aligned} \tag{8}
$$

Sijoittamalla yhtälöön (8) arvo $x = 1$ saamme derivaattafunktion arvoksi

$$
204\cdot 1^3 + 24\cdot 1 - 2 = 204 + 24 - 2 = 226 \tag{9}
$$

3. Tehtävästä kannattaa piirtää taulukko/matriisi, joka havainnollistaa tilannetta:

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} &
\begin{bmatrix}
\square & \square & \square & \square & \checkmark & \checkmark \\
\square & \square & \square & \square & \checkmark & \checkmark \\
\square & \square & \square & \square & \checkmark & \checkmark \\
\square & \square & \square & \square & \checkmark & \checkmark \\
\checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark \\
\checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark & \checkmark
\end{bmatrix}
\end{array} \tag{10}
$$

Taulukossa (10) merkityt ruudut ovat suotuisia tapauksia ja tyhjät ruudut ei-suotuisia tapauksia (kuvio symboloi kaikkia niitä silmälukuja, jotka voidaan saada kahta noppaa heittämällä). Laskemalla suotuisat tapaukset ja jakamalla ne kaikkien mahdollisten tapauksien määrällä saamme todennäköisyyden $\mathcal{P}(\text{voittaa})$:

$$\mathcal{P}(\text{voittaa}) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9} = 0,555\ldots \approx 0,56 \tag{11}$$

Vaikka todennäköisyys on suurempi kuin $1/2$, on myös hyvin mahdollista, että Markku häviäisi vedon. Todennäköisyys sille, että Markku voittaa kaksi kertaa peräkkäin, saadaan yhtälössä (11) lasketun todennäköisyyden neliönä[1]:

$$\mathcal{P}(\text{kaksi voittoa}) = \frac{5}{9} \cdot \frac{5}{9} = \frac{25}{81} = 0,3086\ldots \approx 0,31 \tag{12}$$

4. **a)** Suoran yhtälön yleinen muoto on

$$y - y_0 = k(x - x_0) \tag{13}$$

Sijoittamalla yhtälöön (13) annetut pisteet saadaan yhtälöpari, josta voidaan selvittää haluttu suoran yhtälön muoto. Sijoitetaan ensin piste $(3, -4)$:

$$y + 4 = k(x - 3) \Rightarrow y = kx - 3k - 4 \tag{14}$$

Analogisesti sijoittamalla pisteen $(0, 0)$ saa yhtälön, joka on muotoa $y = kx$. Nyt meillä on yhtälöpari

$$\begin{cases} y &= kx - 3k - 4 \\ y &= kx \end{cases} \tag{15}$$

Yhtälöparista havaitaan helposti, että $-3k - 4 = 0$, joten kulmakertoimen k arvoksi saamme $k = -\frac{4}{3}$. Sijoittamalla tämä alempaan yhtälöparin (15) yhtälöön antaa $y = -\frac{4}{3}x$. Jos tähän suoran yhtälöön lisätään vakio 4, niin saadaan nostettua suora kulkemaan pisteen $(3, 0)$ kautta:

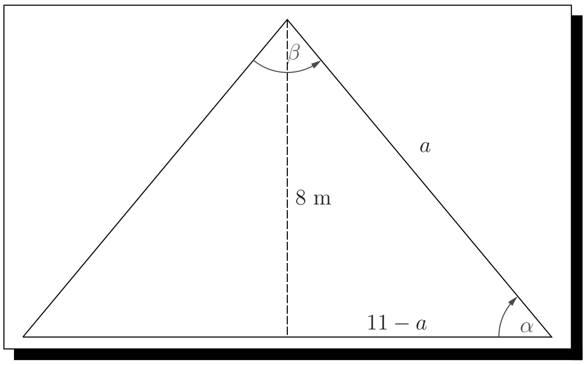
$$y = -\frac{4}{3}x + 4\Big|_{x=3} \Rightarrow y = -\frac{4}{3} \cdot 3 + 4 = 0 \tag{16}$$

b) Tasakylkisessä kolmiossa kantakulmat ovat yhtä suuret ja vastinsivut yhtä pitkät (Kuva 1). Merkitään yhtä pitkien sivujen pituutta symbolilla a, jolloin kolmion kannan pituus on $22\ \text{m} - 2a$.

Tarkastellaan puolikasta koko kolmiosta (suorakulmaista kolmiota). Pythagoraan lauseen nojalla voimme kirjoittaa

$$\begin{aligned} a^2 &= 8^2 + (11 - a)^2 \\ a^2 &= 64 + 11^2 - 2 \cdot 11 \cdot a + a^2 \\ 22a &= 121 + 64 \\ a &= \frac{185}{22} \end{aligned} \tag{17}$$

[1] Kaksi peräkkäistä nopanheittoa ovat toisistaan riippumattomia tapahtumia, jolloin niiden molempien tapahtumatodennäköisyys on todennäköisyyksien tulo.



Kuva 1: Tehtävän 4 kolmio.

Kantakulman α suuruus saadaan laskettua sini avulla:

$$\sin(\alpha) = \frac{8}{185/22} \Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{176}{182}\right) = 72,054\ldots^\circ \approx 72,1^\circ \tag{18}$$

Kolmion kulmien summan avulla saadaan huippukulma β:

$$\beta = 180^\circ - 2 \cdot 72,054\ldots^\circ = 35,89\ldots^\circ \approx 35,9^\circ \tag{19}$$

5. Veron osuus alkoholijuoman hinnasta on 25 %, joten veron korottamisen jälkeen veron euromääräinen osuus juoman kokonaishinnasta on $2,5\,€ \cdot 1,5 = 3,75\,€$. Vastaavasti tulvien vaikutukselle saadaan $7,5\,€ \cdot \frac{4}{3} = 10\,€$. Koska baari antaa juomasta 10 % alennusta, niin lopullinen hinta $\mathcal{H}$ on

$$\mathcal{H} = 0,9 \cdot (3,75 + 10)\,€ = 12,375\,€ \tag{20}$$

6. Merkitään pallon sisähalkaisijaa symbolilla $d_s = 3,5$ cm ja ulkohalkaisijaa $d_u = 4,1$ cm. Pallon tilavuuden yhtälön avulla voidaan suoraan laskea pallon sisäosan tilavuus V_s:

$$\begin{aligned} V_s &= \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d_s}{2}\right)^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi\left(\frac{3,5\text{ cm}}{2}\right)^3 \\ &= 22,44929\ldots\ \text{cm}^3 \end{aligned} \tag{21}$$

Sisäosan massa m_s saadaan kertomalla tilavuus V_s sisäosan tiheydellä $\rho_s = 2,1\ \text{g/cm}^3$, eli

$$m_s = 22,44929\ldots\ \text{cm}^3 \cdot 2,1\ \text{g/cm}^3 = 47,143\ldots\ \text{g} \tag{22}$$

Ulkokuoren tilavuus saadaan vähentämällä suuremman ja pienemmän pallon tilavuudet toisistaan:

$$\begin{aligned} V_{\text{kuori}} &= V_u - V_s \\ &= \frac{4}{3}\pi\left[\left(\frac{d_u}{2}\right)^3 - \left(\frac{d_s}{2}\right)^3\right] \\ &= \frac{4}{3}\pi \cdot \left[\left(\frac{4,1\text{ cm}}{2}\right)^3 - \left(\frac{3,5\text{ cm}}{2}\right)^3\right] \\ &= 13,637\ldots\ \text{cm}^3 \end{aligned} \tag{23}$$

Ulkokuoren massan saamme kertomalla kuorimateriaalin tiheydellä $\rho_u = 2,5\ \mathrm{g/cm^3}$:

$$m_u = 13,637\ldots\ \mathrm{cm^3} \cdot 2,5\ \mathrm{g/cm^3} = 34,0941\ldots\ \mathrm{g} \tag{24}$$

Yhdistämällä nämä kaksi massaa saamme pallon kokonaismassaksi

$$m_u + m_s = 34,0941\ldots\ \mathrm{g} + 47,143\ldots\ \mathrm{g} = 81,237\ldots\ \mathrm{g} \approx 81\ \mathrm{g} \tag{25}$$

7. Viimeisessä tehtävässä tuli selvittää kaksi kappaletta suoran yhtälöitä. Olkoon l_1 suora, jonka kulmakerroin on 2 ja l_2 suora, jonka kulmakerroin on 4. Nyt ensimmäiselle suoralle saadaan

$$\begin{aligned} y &= 2x + b \qquad \Big| \text{ sijoitetaan piste } (1,3) \\ 3 &= 2 \cdot 1 + b \\ &\Rightarrow b = 1 \end{aligned} \tag{26}$$

Ensimmäinen suora l_1 on siis muotoa $y = 2x + 1$, josta termejä siirtelemällä saadaan perusmuoto

$$y - 2x - 1 = 0 \tag{27}$$

Suoralle l_2 vastaava lasku antaa yhtälön, joka on muotoa $y + 4x - 7 = 0$.

LYHYEN MATEMATIIKAN SIMULOITU YO-KOE 2

Vastaa korkeintaan neljään tehtävään. Kirjoita jokaisen tehtävän vastaus selvällä käsialalla ja riittävin sanallisin perustein.

Tämän kokeen arvioitu suoritusaika on täysimittainen ylioppilaskoe, eli 3–6 tuntia. Koe sisältää tehtäviä ainoastaan pakollisista lyhyen matematiikan kursseista.

1. **a)** Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x - 3 &= y + 2 \\ x - 2y &= 7 \end{cases}$$

b) Sievennä lauseke

$$\frac{x + a}{x^2 - 2x + 1} + \frac{1}{1 - x}$$

Laske myös lausekkeen arvo, kun $a = 1$ ja $x = -1$.

c) Anna esimerkit kokonaisluvuista b ja c, jolle pätee

$$\frac{b^2}{b + c} = \frac{c^2}{c - 2b}$$

2. **a)** Suureet x ja y ovat suoraan verrannolliset. Kun $x = 2$, niin $y = 11$. Mikä on suureen x arvo, kun $y = 23$?

b) Ympyräpohjaisen lieriön muotoisen oluttuopin pohjan säde on 6 cm ja korkeus 14 cm. Tuoppiin kaadetaan juomaa siten, että piripintaan mitattuna tyhjää tilaa on lasin sisällä 5 cm. Laske, kuinka paljon juomaa tuopissa on senttilitroissa mitattuna.

c) Kuusi liikemiestä kättelevät toisiaan lentokentällä. Kuinka monta kättelyä on oltava, ennen kuin kaikki ovat tervehtineet toisiaan täsmälleen yhden kerran?

3. Tasasivuisen kolmion sivun pituus on a. Kuinka monta prosenttia kolmion ala on sellaisen neliön alasta, jonka lävistäjän pituus on $\sqrt{2}a$?

4. Erikoislaatuinen Maestro Mystique -kahvi valmistetaan kahdesta kolumbialaisesta kahvipavusta A ja B. Yhteen annokseen (12 g) tarvitaan 20 % papuja A ja 80 % papuja B. Kuinka monta litraa juotavaa voidaan valmistaa erästä, jossa on 500 g A-luokan papuja ja 2300 g B-luokan papuja? Oletetaan, että yhdestä annoksesta saadaan yksi kupillinen eli 2 dl valmista kahvia. Huomioi ainoastaan kokonaiset kahvikupit.

5. Metallibändi myy levyjä hintaan x €/kpl. Yhden levyn tuotantokustannukset ovat keskimäärin 3,5 € ja myyntivoitto jakautuu neljään osaan siten, että manageri saa 28 %, studioäijät 13 %, markkinointitiimi 11 % ja artisti loput. Jos bandissa on viisi jäsentä ja jokainen haluaa levytuloilla ostaa itselleen uuden instrumentin (hinta 2000 €), niin kuinka paljon levyn hintalappuun tulee laittaa euroja? Yhtyeen myynti on keskimäärin 8500 levyä/albumi.

6. UNO-korttipakassa on numeroituja erivärisiä kortteja. Numeroita on väliltä 0–9 ja värejä on neljä: sininen, punainen, keltainen ja vihreä. Jokaista korttia on kaksi kappaletta ja tämän lisäksi jokaisella värillä on 5 kpl erikoiskortteja, joiden numeron pelaaja saa itse valita (ns. jokerikortit).

a) Pakasta nostetaan kolme korttia laittamatta niitä takaisin. Laske todennäköisyys sille, että kaikki kortit ovat nollia.

b) Poistetaan pakasta erikoiskortit. Nostetaan viisi korttia siten, että nostettu kortti laitetaan noston jälkeen takaisin ja sekoitetaan pakkaan. Millä todennäköisyydellä pakasta nousee vain vihreitä kortteja, joiden numeroarvo on vähintään 2?

7. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x + 4y - z &= 3 \\ 2y - 8z &= 5 \\ -3x + 7z &= 9 \end{cases}$$

ja laske sen avulla funktion $f(a) = xa^2 + ya - z$ nollakohdat kahden desimaalin tarkkuudella.

8. Titaanista valmistettu valumuotti on puolipallon muotoinen. Muottiin kaadetaan tinaseosta, jossa on neljäsosa tinaa ja loput tuntematonta metallia. Laske tuntemattoman metallin tiheys, kun tinan tiheys on 5,77 $\mathrm{g/cm^3}$, pallomuotin ympärysmitta on 36 cm ja lopputuotteena valmistuneen sisustuselementin massa on 7 kg.

9. **a)** Suora kulkee pisteiden $(1, -2)$ ja $(-2, 4)$ kautta. Määritä suoran yhtälö. Kuinka suuren kulman suora muodostaa suoran $x = 0$ kanssa?

b) Määrää vakio γ siten, että paraabeli $-x^2 + 3x + \gamma$ on kaikkialla nollan alapuolella.

10. Göran matkaa Malmöstä Tukholmaan henkilöautolla. Hän ajaa keskinopeudella 100 km/h, ja matkan kokonaispituus on 650 km. Göranin matkattua 350 km Landskronan poliisit saavat selville, että hän yrittää paeta maasta, ja lähtevät ajamaan häntä takaa. Millä nopeudella poliisien tulee ajaa, jos he haluavat saada Göranin kiinni 20 km ennen Tukholmaa? Landskronan ja Tukholman välinen etäisyys on 570 km ja voidaan olettaa, että kaikki kaupungit sijaitsevat samalla suoralla.

Lyhyen matematiikan simuloitu YO-koe 2 Ratkaisut

1. Tarkastellaan yhtälöparia, polynomin sievennöstä ja lausekkeeseen sijoittamista.

a) Ratkaistaan jälkimmäisestä yhtälöstä x, jolle saadaan lauseke $x = 7 + 2y$. Sijoitetaan tämä alempaan yhtälöön, joka antaa

$$\begin{aligned} 2 \cdot (7 + 2y) - 3 &= y + 2 \\ 14 + 4y - 3 &= y + 2 \\ 3y &= 2 + 3 - 14 \\ y &= -3 \end{aligned} \tag{1}$$

Sijoittamalla saatu tulos muuttujan x lausekkeeseen saamme $x = 7 + 2 \cdot (-3) = 1$.

b) Sievennetään annettua lauseketta algebrallisilla operaatioilla:

$$\begin{aligned} \frac{x+a}{x^2 - 2x + 1} + \frac{1}{1-x} &= \frac{x+a}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} \\ &= \frac{x + a - (x-1)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{a+1}{(x-1)^2} \end{aligned} \tag{2}$$

Sijoittamalla $a = 1$ ja $x = -1$ saadaan lausekkeen arvoksi $\frac{1+1}{(-1-1)^2} = \frac{1}{2}$.

c) Tämäntyyppisissä tehtävissä kannattaa yleensä kokeilla jollakin pienillä luvuilla, esimerkiksi luvuilla 1 tai -1 ja katsoa, mitä käy. Arvataan, että $b = -1$, jolloin lauseke muuttuu muotoon

$$\frac{1}{c-1} = \frac{c^2}{c+2} \tag{3}$$

Yhtälöstä havaitaan, että esimerkiksi luku $c = 2$ toteuttaa annetun yhtälön[1]:

$$\frac{1}{2-1} = \frac{2^2}{2+2} \Leftrightarrow \frac{1}{1} = \frac{4}{4} \tag{4}$$

Näin ollen sopivat kokonaisluvut ovat $b = -1$ ja $c = 2$.

2. Katsotaan lyhyesti verrannollisuutta, avaruusgeometriaa ja permutaatioita.

a) Kun kaksi asiaa x ja y ovat suoraan verrannolliset, niiden osamäärä x/y on vakioluku. Voimme kirjoittaa annettujen tietojen avulla verrannon

$$\frac{2}{11} = \frac{x}{23}, \tag{5}$$

josta saamme tuntemattomalle x:lle arvon $x = \frac{23 \cdot 2}{11} = \frac{46}{11}$.

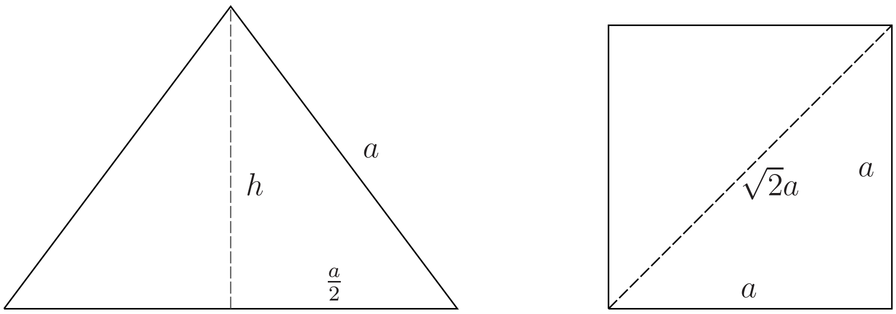
[1] Tätä ei välttämättä kannata alkaa laskemaan yhtälön ratkaisun kautta, sillä siihen menee huomattavan paljon aikaa.

b) Tuopissa juoman yläpinta on 5 cm piripinnasta eli lasin pohjasta 9 cm korkeudelle asti. Ympyräpohjaisen lieriön tilavuus saadaan kertomalla pohjan pinta-ala πr^2 korkeudella $h =$ 9 cm, joten tulokseksi saamme

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot (6\text{ cm})^2 \cdot 9\text{ cm} = 1017,87\ldots\text{ cm}^3 = 1,01787\text{ l} \approx 102\text{ cl} \tag{6}$$

c) Kättelyjen määrä on helppo päätellä: ensimmäinen henkilö kättelee viittä muuta, seuraava neljää, seuraava kolmea ja niin edelleen. Kättelyitä tulee yhteensä $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ kpl.

3. Piirretään tilanteesta kuva, johon on merkitty kolmio ja neliö (kuva 1).



Kuva 1: Tehtävän 3 kolmio ja neliö.

Pythagoraan lauseen avulla saadaan laskettua kolmion korkeus:

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + \frac{a^2}{4} \\ h^2 &= a^2 - \frac{a^2}{4} \\ \Rightarrow h &= \sqrt{a^2\left(1 - \frac{1}{4}\right)} \\ &= a\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{aligned} \tag{7}$$

Kolmion pinta-ala A_k on kannan ja korkeuden tulo jaettuna kahdella:

$$A_k = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \tag{8}$$

Kuvan 1 neliölle huomataan pythagoraan lause kirjoittamalla, että neliön sivun pituus on a. Neliön ala A_n on näin ollen a^2. Jakamalla kolmion ala neliön alalla saamme

$$\frac{A_k}{A_n} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{a^2} d = \frac{\sqrt{3}}{4} = 0,433\ldots \approx 43\% \tag{9}$$

4. Tehtävän ideana on selvittää, kumman raaka-aineen yläraja tulee ensiksi vastaan. Kahvipapua A on annoksessa 20 % eli 2,4 grammaa. Koska papuja oli yhteensä 500 g, niin annoksia saadaan $500/2,4 = 208,33\ldots$ kappaletta. Vastaavasti papulaatua B on annosta kohden 80 % eli 9,6 grammaa, joten annoksia saadaan $2300/9,6 = 239,583\ldots$ kappaletta. Papulaatu A loppuu ensin, joten kokonaisia annoksia on 208, joka tarkoittaa 41,6 litraa valmista kahvia.

5. Yhtyeen levyn tuotoksi halutaan $5 \cdot 2000$ € $= 10000$ €. Merkitään yksittäisen levyn hintaa muuttujalla x. Yhden levyn bändille tuomille tuloille $\mathcal{T}_1$ voidaan kirjoittaa nyt lauseke, joka huomioi kulut:

$$\mathcal{T}_1 = x - 3,5\,€ - (0,28 + 0,13 + 0,11) \cdot (x - 3,5\,€) \tag{10}$$

Kertomalla yhden levyn tuottoa myytävien levyjen määrällä saadaan kokonaistuotto, joka asetetaan yhtä suureksi kuin ostettaviin instrumentteihin vaadittava rahasumma eli 10000 €:

$$\begin{aligned} 10000 &= 8500 \cdot \mathcal{T}_1 \\ &= 8500 \cdot [x - 3,5\,€ - 0,52 \cdot (x - 3,5\,€)] \\ &= 8500 \cdot 0,48 \cdot (x - 3,5\,€) \\ \Rightarrow x &= \frac{10000}{0,48 \cdot 8500} + 3,5\,€ \\ &= 5,95098\ldots\,€ \\ &\approx 5,95\,€ \end{aligned} \tag{11}$$

Levyn lopulliseksi hinnaksi tulee karvan verran alle kuusi euroa.

6. Tarkastellaan korttipakan todennäköisyyksia hieman tavallisesta poikkeavalla pakalla (poikkeaa myös tavallisesta UNO-pakasta jonkin verran).

a) Kun kortteja nostetaan pakasta, niin aiemmat tapahtumat vaikuttavat seuraavien tapahtumien todennäköisyyksiin (korttien määrä pakassa vähenee). Nyt nollia on jokaisessa värissä kaksi kappaletta eli yhteensä 8 ja lisäksi on 20 jokerikorttia, joten todennäköisyydeksi kolmelle nollakortille saadaan

$$\mathcal{P}(\text{kolme nollakorttia}) = \frac{28}{100} \cdot \frac{27}{99} \cdot \frac{26}{98} = 0,020259\ldots \approx 0,02 \tag{12}$$

b) Pakasta otetaan erikoiskortit pois, jolloin pakkaan jää 80 korttia. Todennäköisyys sille, että pakasta nousee vihreä kortti, on $0,25$. Todennäköisyys kortille, jonka arvo on vähintään 2, on $0,8$. Halutaan, että molemmat ehdot ovat voimassa, eli että kortti on vihreä ja arvoltaan vähintään 2, jolloin todennäköisyys ks. tapahtumalle on $0,25 \cdot 0,8 = 0,2$. Koska kortti sekoitetaan aina noston jälkeen takaisin pakkaan, niin jokaisen viiden nostotapahtuman todennäköisyys on tuo sama 0,2. Näin ollen saamme todennäköisyydeksi

$$\mathcal{P}(\text{viisi vihreää, arvo väh. 2}) = 0,2^5 = 0,00032 \tag{13}$$

7. Yhtälöryhmän ensimmäisestä yhtälöstä saamme lausekkeen muuttujalle x, eli $x = 3 - 4y + z$. Sijoittamalla tämä kolmanteen yhtälöön saadaan

$$-3 \cdot (3 - 4y + z) + 7z = 9 \Leftrightarrow 12y + 4z = 18$$

Näin ollen meillä on yhtälöpari

$$\begin{cases} 2y - 8z & = 5 \\ 12y + 4z & = 18 \end{cases}$$

Kertomalla jälkimmäistä yhtälöä kahdella ja laskemalla yhtälöt allekkain saadaan ratkaistua muuttuja y:

$$\begin{aligned} & 2y - 8z = 5 \\ - \quad & 24y + 8z = 36 \\ & 26y = 41 \Rightarrow y = \frac{41}{26} \end{aligned}$$

Sijoittamalla saatu tulos ylempään yhtälöparin yhtälöön antaa

$$\begin{aligned} 2 \cdot \left(\frac{41}{26}\right) - 8z &= 5 \\ 8z &= \frac{82}{26} - \frac{130}{26} \\ z &= \frac{-48}{26 \cdot 8} \\ &= -\frac{3}{13} \end{aligned} \tag{14}$$

Sijoittamalla lasketut z:n ja y:n arvot yhtälöryhmän ensimmäiseen yhtälöön $x = 3 - 4y + z$ saamme muuttujan x arvoksi

$$x = 3 - 4 \cdot \frac{41}{26} - \frac{3}{13} = \frac{78 - 164 - 6}{26} = -\frac{92}{26} = -\frac{46}{13}$$

Yhtälöryhmän ratkaisut ovat siis $x = -46/13$, $y = 41/26$ ja $z = -3/13$. Sijoittamalla nämä annetun funktion $f(a)$ lausekkeeseen ja laittamalla funktion arvo nollaksi voimme laskea nollakohdat toisen asteen yhtälöstä:

$$\begin{aligned} f(a) &= -\frac{46}{13}a^2 + \frac{41}{26}a + \frac{3}{13} = 0 \\ \Rightarrow a &= \frac{-\frac{41}{26} \pm \sqrt{\left(\frac{41}{26}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{46}{13}\right) \cdot \frac{3}{13}}}{2 \cdot \left(-\frac{46}{13}\right)} \end{aligned} \tag{15}$$

Sijoittamalla laskimeen ylläolevat luvut erikseen $\ominus$ ja $\oplus$-merkeille saamme funktion nollakohdiksi arvot $a_\ominus \approx 0,55$ ja $a_\oplus \approx -0,11$.

8. Valumuotin ympärysmitan avulla saadaan laskettua muotin tilavuus V, sillä kehän pituudelle K on voimassa $K = 2\pi r \Leftrightarrow r = K/2\pi$. Sijoittamalla tämä puolipallon tilavuuden kaavaan saamme

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi r^3 \\ &= \frac{2}{3} \cdot \pi \left(\frac{K}{2\pi}\right)^3 \\ &= \frac{K^3}{3 \cdot 4\pi^2} \\ &= \frac{(36 \text{ cm})^3}{3 \cdot 4\pi^2} \\ &= 393{,}93676\ldots \text{ cm}^3 \end{aligned} \tag{16}$$

Seoksesta neljäsosa on tinaa ja loput tuntematonta metallia. Muotin massa $m = 7$ kg saadaan osien summana:

$$m = \frac{V}{4} \cdot \rho_t + \frac{3V}{4} \cdot \rho, \tag{17}$$

missä $\rho_t = 5{,}77 \text{ g/cm}^3$ on tinan tiheys ja ρ on tuntemattoman metallin tiheys. Ratkaisemalla yhtälö ρ:lle saamme lopulta vastauksen:

$$\begin{aligned} m &= \frac{V}{4} \cdot \rho_t + \frac{3V}{4} \cdot \rho \\ \frac{3V}{4} \cdot \rho &= m - \frac{V}{4} \cdot \rho_t \\ \Rightarrow \rho &= \frac{m - \frac{V}{4} \cdot \rho_t}{\frac{3V}{4}} \\ &= \frac{7000 \text{ g} - \frac{393{,}937 \text{ cm}^3}{4} \cdot 5{,}77 \text{ g/cm}^3}{\frac{3 \cdot 393{,}937 \text{ cm}^3}{4}} \\ &= 21{,}7691\ldots \text{ g/cm}^3 \\ &\approx 21{,}77 \text{ g/cm}^3 \end{aligned} \tag{18}$$

Tuntemattoman aineen tiheys on samaa luokkaa kuin platinan tiheys.

9. Tarkastellaan suoran ja paraabelin ominaisuuksia lyhyesti.

a) Kirjoitetaan suoran yhtälön perusmuoto molemmille pisteille:

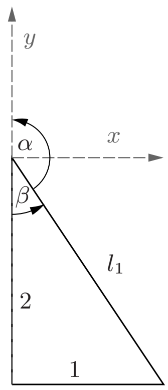
$$\begin{aligned}
y - y_0 &= k(x - x_0) \qquad || \text{ sij. } (1, -2) \\
y + 2 &= k(x - 1) \\
y &= kx - k - 2 \\
\\
y - y_0 &= k(x - x_0) \qquad || \text{ sij. } (-2, 4) \\
y - 4 &= k(x + 2) \\
y &= kx + 2k + 4
\end{aligned} \tag{19}$$

Nyt suoran vakiotermien tulee olla samat, eli saamme kulmakertoimelle k yhtälön

$$-k - 2 = 2k + 4,$$

josta kulmakertoimen arvoksi tulee $k = -2$. Sijoittamalla tämä esimerkiksi ensimmäisen suoran yhtälöön saadaan $y = -2x$ suoran yhtälöksi.

Suora $x = 0$ on itse asiassa y-akseli. Nyt voidaan piirtää tilanteeseen apukuviona suorakulmainen kolmio suoran kulmakertoimen perusteella (kuva 2).



Kuva 2: Tehtävän 9 kolmio koordinaatistossa. Suoran kulmakertoimesta on helppo päätellä kolmion sivujen pituudet suoraan. Suoraa on merkitty kuvassa symbolilla l_1 ja se kulkee kolmion hypotenuusaa pitkin. Suoran $y = 2x$ ja y-akselin välisiä kulmia on kaksi kappaletta, α ja β.

Suoran ja y-akselin välisiä kulmia on kaksi, α ja β, ja ensimmäinen saadaan laskettua tangentin avulla:

$$\begin{aligned} \tan(\beta) &= \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \beta &= \arctan\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 26,565\ldots^\circ \end{aligned} \tag{20}$$

Toinen kulma α saadaan oikokulman kaavasta, eli $\alpha = 180^\circ - 26,565\ldots^\circ = 153,434\ldots^\circ$. Vastaukseksi kulmille saadaan siis $\alpha \approx 153^\circ$ ja $\beta \approx 27^\circ$.

b) Annetulle paraabelille $f(x)$ halutaan, että $f(x) \leq 0$ kaikille reaaliluvuille x. Tämä ehto saavutetaan, kun valitaan vakio γ siten, että paraabelin maksimiarvon on pienempää kuin 0. Paraabeli saavuttaa maksimiarvonsa sen derivaatan nollakohdissa, joten lasketaan derivaattafunktio ja asetetaan se nollaksi:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}f(x) &= \frac{d}{dx}\left[-x^2 + 3x + \gamma\right] \\ &= -2x + 3 = 0 \\ \Rightarrow x &= \frac{3}{2} \end{aligned} \tag{21}$$

Tiedämme, että kyseinen piste todella on maksimipiste, sillä paraabeli aukeaa alaspäin (miinusmerkki termin x^2 edessä). Lasketaan funkion $f(x)$ arvo tässä pisteessä ja asetetaan se pienemmäksi tai yhtäsuureksi kuin 0:

$$\begin{aligned} f(3/2) &= -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} + \gamma \leq 0 \\ \Rightarrow \gamma &\leq \frac{9}{4} \end{aligned} \tag{22}$$

Vakio γ ollessa $\gamma \leq 9/4$ saavuttaa paraabelifunktio $f(x)$ vain ei-positiivisia arvoja.

10. Göranin etäisyys Tukholmasta poliisien havaintohetkellä on 300 km. 20 kilometriä ennen Tukholmaa olevaan paikkaan on matkaa 280 km, ja Göranilta menee tähän matkaan aikaa

$$t = 280 \text{ km}/100 \text{ km/h} = 2,8 \text{ h}$$

Poliisit ajavat matkan $s = (550 - 20)$ km $= 530$ km samassa ajassa, jolloin keskinopeus v on

$$v = \frac{550 \text{ km}}{2,8 \text{ h}} = 196,428\ldots \text{ km/h} \approx 200 \text{ km/h} \tag{23}$$