Numerik Partieller Differentialgleichungen

Herbst 2012

Sisältö

Johdanto

Moniste sisältää luennot kurssilta *Numerik Partieller Differentialgleichungen*, Johannes Kepler Universität Linz, syksy 2012.

Luennoitsijana Clemens Pechstein. Kurssin verkkosivu. Esitys perustuu Luentojen ohella Walter Zulehnerin kirjoihin [3] ja [4] sekä tarvittavilta osin muutamaan muuhun funktionaalianalyysin ja osittaisdifferentiaaliyhtälöiden teokseen.

Minulla ei ollut ennen tätä kurssia aiempaa kokemusta funktionaalianalyysistä muuten kuin Hilbertin avaruuksien osalta liittyen kvanttimekaniikan matemaattiseen teoriaan. Tästä syystä en anna takuita siitä, että tässä monisteessa esitetyt asiat pitäisivät paikkansa tai muodostaisivat ”hyvän” kokonaisuuden. Olen kuitenkin tehnyt parhaani, jotta näin olisi.

Linzissä (päivämäärä jolloin valmis),

Riku Järvinen

1 Reuna-arvo-ongelmia

Tarkastellaan toisen asteen tavallisen osittaisdifferentiaaliyhtälön ratkaisemista yksiulotteisessa tapauksessa reaaliluvuille $x \in [0,1]$. Väliä $[0,1]$ kutsutaan tässä kontekstissa `laskennalliseksi alueeksi` (*computational domain*).

Lemma 1.1 *Oletetaan tunnetuiksi funktionaalianalyysin suppenemistulokset ja vastaavat. Asiat on lyhyesti kerrattu luvussa 2.*

1.1 Klassinen muotoilu

Klassinen differentiaaliyhtälö.

Etsi funktio $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ siten, että kaikille $x \in (0,1)$ on voimassa (differentiaali)yhtälö

$$-[a(x)u'(x)]' + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x), \tag{1}$$

reunaehdoilla

$$u(0) = g_0 \tag{2}$$
$$a(1)u'(1) = g_1. \tag{3}$$

(α)

Reunaehtoa (2) kutsutaan `Dirichletin` ehdoksi ja ehtoa (3) `Neumannin` ehdoksi. Funktioita a, b ja c kutsutaan `dataksi`, sillä ne sisältävät ratkaistavan ongelman kannalta relevantteja riippuvuussuhteita. Funktio u on `klassinen ratkaisu` ja sille pätee

$$u \in \mathcal{C}[0,1], \;\; u' \in \mathcal{C}(0,1] \quad \text{ja} \quad u'' \in \mathcal{C}(0,1), \tag{4}$$

missä $\mathcal{C}$ on kerran jatkuvasti differentioituvien funktioiden avaruus. Kerroinfunktiot a, b, c, vakiot g_0, g_1 ja yhtälön (1) oikea puoli f ovat määriteltyjä seuraavissa avaruuksissa.

$$\begin{aligned} &a \in \mathcal{C}(0,1], \\ &a', b, c, f \in \mathcal{C}(0,1) \\ &g_0, g_1 \in \mathbb{R}\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Esimerkki 1.2 (Malliongelma) Tarkastellaan tilannetta $a(x) \equiv 1$, $b(x) \equiv 0$ ja $c(x) \equiv 0$, jolloin yhtälö (1) saadaan muotoon

$$-u''(x) = f(x), \tag{6}$$

reunaehdoilla $u(0) = g_0$ ja $u'(1) = g_1$. Tätä esimerkkiä kutsutaan `malliongelmaksi` ja siihen palataan myöhemmin useaan otteeseen. Lisää vastaavia esimerkkimuotoiluja voivat aiheesta kiinnostuneet (vaikkapa vertailun vuoksi) silmäillä teoksen [1] luvusta 8.

1.2 Variaatiomuotoilu

Olkoon $v : [0,1] \to \mathbb{R}$ `testifunktio`. Sopivien differentioituvuus- ja integroituvuusehtojen ollessa voimassa voidaan tehdä muutamia operaatioita. Kerrotaan aluksi yhtälöä (1) testifunktiolla v ja integroidaan yli tarkasteluvälin $[0,1]$:

$$\int_0^1 -(au')'v + bu'v + cuv \, \mathrm{d}x = \int_0^1 fv \, \mathrm{d}x \tag{7}$$

Suoritetaan termin $-(au')'v$ osittaisintegrointi, joka antaa

$$\int_0^1 -(au')'v \, \mathrm{d}x = -au'v\Big|_0^1 + \int_0^1 au'v' \, \mathrm{d}x \tag{8}$$

Lopuksi huomioidaan vielä reunaehdot (2) ja (3), joiden lisäksi tehdään **valinta**[1] $v(0) = 0$ testifunktiolle v, joista seuraa:

$$\begin{aligned} -\underbrace{a(1)u'1}_{=g_1} v(1) + \int_0^1 au'v' + bu'v + cuv \, \mathrm{d}x &= \int_0^1 fv \, \mathrm{d}x \\ \int_0^1 au'v' + bu'v + cuv \, \mathrm{d}x &= \int_0^1 fv \, \mathrm{d}x + g_1 v(1) \end{aligned} \tag{9}$$

Reunaehdot voidaan jakaa kahteen ryhmään. `Oleelliset` (*essential*) jotka saavat aikaan vastaavat homogeeniset reunaehdot testifunktioille v sekä `luonnolliset` (*natural*) ehdot, jotka on sisällytetty variaatiomuotoiluun. Esimerkiksi Dirichlectin ehto (2) on oleellinen, kuten myös ehto $v(0) = 0$; Neumannin ehto (3) puolestaan luonnollinen. Näiden lisäksi voidaan määritellä esimerkiksi `Robinin` reunaehto, joka on luonnollinen (ks. laskuharjoitus 1), seuraavasti:

$$a(1)u'(1) = g_1 - \alpha_1 u(1) \tag{10}$$

Kokoamalla edelliset asiat yhteen voidaan nyt muotoilla klassista ongelmaa (α) vastaava variaatio-ongelma:

Etsi funktio $u : [0,1] \to \mathbb{R}$ jolle $u(0) = g_0 \in \mathbb{R}$ siten, että

$$\int_0^1 au'v' + bu'v + cuv \, \mathrm{d}x = \int_0^1 fv \, \mathrm{d}x + g_1 v(1) \tag{11}$$

kaikille testifunktioille $v : [0,1] \to \mathbb{R}$ joille on voimassa homogeenisuusehto (laita viite) $v(0) = 0$. (β)

Huomaa, että variaatiomuotoilu ei sisällä lainkaan toisia derivaattoja. Tästä syystä funktion u määrittelyehtoja (4) voidaan hieman "löysätä".

Funktioavaruuksista

Variaatiomuotoilu (β) on hyvin asetettu, jos siinä esiintyvät integraalit ovat olemassa äärellisinä. Esimerkiksi yhtälön (11) vasemman puolen termille cuv tulee olla voimassa

[1] Selitetään myöhemmin tarkemmin. Liittyy ilmeisesti jollakin tavalla yhtälön homogenisointiin...?

$c \in \mathrm{L}^\infty(0,1)$ ja $u, v \in \mathrm{L}^2(0,1)$, sillä

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 cuv \, \mathrm{d}x\right| &\overset{(fa)}{\leq} \|c\|_{\mathrm{L}^\infty_{(0,1)}} \int_0^1 |uv| \, \mathrm{d}x \\ &\overset{(cs)}{\leq} \|c\|_{\mathrm{L}^\infty_{(0,1)}} \|u\|_{\mathrm{L}^2_{(0,1)}} \|u\|_{\mathrm{L}^2_{(0,1)}} \\ &< \infty,\end{aligned} \tag{12}$$

missä epäyhtälö (fa) seuraa funktionaalianalyysin perustuloksista ja (cs) Cauchy-Schwarzin epäyhtälöstä (170). Muille termeille arvioinnit tehdään samaan tapaan, jolloin pätee

$$a, b, c \in \mathrm{L}^\infty(0,1) \tag{13}$$
$$u, u', v, v' \text{ ja } f \in \mathrm{L}^2(0,1) \tag{14}$$

Yhtälössä (11) derivaatat ovat integroinnin sisällä. Tämä ehdottaa käytettäväksi `heikkoa derivaattaa`, jota varten muotoillaan pari apumääritelmää.

Määritelmä 1.3 Olkoon $v \in \mathcal{C}(0,1)$. Funktion v `tuki` (*support*) on

$$\mathrm{supp}\,(v) = Cl\left(\{x \in (0,1) \mid v(x) \neq 0\}\right), \tag{15}$$

missä $Cl(\cdot)$ tarkoittaa joukon $\{\cdot\}$ sulkeumaa. Edelleen määritellään avaruus $\mathcal{C}_0^\infty(0,1)$.

$$\mathcal{C}_0^\infty(0,1) = \{v \in \mathcal{C}^\infty(0,1) \mid \mathrm{supp}\,(v) \ \subset \mathcal{C}(0,1)\}. \tag{16}$$

Määritelmä 1.4 (heikko derivaatta) Olkoon $\tilde{v}, v \in \mathrm{L}^2(0,1)$. Funktio $\tilde{v}$ on v:n *heikko derivaatta*, jos ja vain jos kaikille $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty$ on voimassa

$$\int_0^1 \tilde{v}\phi \, \mathrm{d}x = -\int_0^1 v\phi' \, \mathrm{d}x. \tag{17}$$

Yhtälö (17) voidaan johtaa osittaisintegroimalla vasenta puolta ja asettamalla funktio ϕ nollaksi laskennallisen alueen reunapisteissä. Voidaan osoittaa, että heikko derivaatta on *yksikäsitteinen* $\mathrm{L}^2(0,1)$:ssa ja jos klassinen derivaatta on olemassa, niin se on sama kuin heikko derivaatta.

Esimerkki 1.5 (heikko derivaatta, ei klassista derivaattaa) Olkoon funktio

$$v(x) = \begin{cases} x, & x \in (0, 1/2) \\ 1-x, & x \in (1/2, 1) \end{cases} \tag{18}$$

Selvästi $v \in \mathcal{C}^1(0, 1/2)$ ja $v \in \mathcal{C}^1(1/2, 1)$, mutta klassista derivaattaa ei ole pisteessä $x^* = 1/2$. Klassinen derivaatta w on määritelty

$$w(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1/2) \\ -1, & x \in (1/2, 1) \end{cases} \tag{19}$$

Havaitaan, että $w \in \mathrm{L}^2(0,1)$, sillä se on paloittain vakiofunktio ja näin ollen integroituva. Integroimalla väliä $[0,1]$ saadaan

$$\begin{aligned}\int_0^1 w\phi \, \mathrm{d}x &= \int_0^{1/2} v'\phi \, \mathrm{d}x + \int_{1/2}^1 v'\phi \, \mathrm{d}x \\ &= v\phi\Big|_0^{1/2} - \int_0^{1/2} v\phi' \, \mathrm{d}x + v\phi\Big|_{1/2}^1 - \int_{1/2}^1 v\phi' \, \mathrm{d}x\end{aligned} \tag{20}$$

Yhtälössä (20) v' tarkoittaa klassista derivaattaa. Koska ϕ katoaa laskennallisen alueen reunoilla eli $\phi(0) = 0 = \phi(1)$, yhtälöstä (20) saadaan ottamalla raja-arvot ja yhdistämällä integrointitermit

$$\begin{aligned}\int_0^1 w\phi \,\mathrm{d}x &= \underbrace{\left[\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} v(x) - \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} v(x)\right]}_{=0}\phi(1/2) - \int_0^1 v\phi' \,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^1 v\phi' \,\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{21}$$

eli w on v:n heikko derivaatta.

Jos funktio on epäjatkuva tarkastelupisteessä x^*, niin voi olla, että heikkoakaan derivaattaa ei ole olemassa. Näin on esimerkiksi funktiolle

$$v(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, 1/2) \\ -1, & x \in (1/2, 1) \end{cases} \tag{22}$$

Todistus samaan tapaan kuin esimerkissä 1.5. Heikon derivaatan olemassaololle pätee kuitenkin seuraava tulos.

Lemma 1.6 *Paloittain jatkuvasti differentioituvalla funktiolla $v : [0,1] \to \mathbb{R}$ on olemassa heikko derivaatta, jos ja vain jos v on globaalisti jatkuva eli jatkuva kaikilla $x \in [0,1]$.*

Todistuksen idea. Oletetaan, että funktiolla v on korkeintaan numeroituvasti ääretön määrä pisteitä, joissa se ei ole differentioituva. Jakamalla laskennallinen alue numeroituvasti äärettömään osaväliin ja osittaisintegroimalla esimerkin 1.5 tavoin saadaan

$$\int_0^1 v'\phi \,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}(v_{k_-} - v_{k_+})\phi_k - \int_0^1 v\phi' \,\mathrm{d}x, \tag{23}$$

missä $v_{k_-} := \lim_{x\to x_k-}$ eli vasemmalta puolelta lähestyttäessä raja-arvo (vastaavasti termi v_{k_+}), $\phi_k := \phi(x_k)$ ja pisteet x_k ovat ei-differentoituvia pisteitä. Mikäli v on jatkuva, niin $(v_{k_-} - v_{k_+}) = 0$ jokaiselle k ja heikko derivaatta on olemassa. Jos heikko derivaatta puolestaan on olemassa, niin yhtälössä (23) esiintyvän summan tulee olla 0. Jätetään harjoitustehtäväksi sen osoittaminen, että jokainen yksittäinen termi on nolla.

□

Merkinnöistä 1.7 Merkintää v' käytetään tästä eteenpäin tarkoittamaan myös heikkoa derivaattaa. Tämä selviää asiayhteydestä.

Heikon derivaatan käyttöönotto ja ensimmäisen kertaluvun derivaatat yhdessä aiheuttavat sen, että aletaan tarkastelemaan Sobolev-avaruutta H^1, joka määritellään seuraavaksi.

Määritelmä 1.8 (Sobolev-avaruus) Olkoon $v \in \mathrm{L}^2(0,1)$. Sobolev-avaruus (*työavaruus*) $\mathrm{H}^1(0,1)$ on joukko

$$\mathrm{H}^1(0,1) = \{v \in \mathrm{L}^2(0,1) \mid v' \in \mathrm{L}^2(0,1)\} \tag{24}$$

Käytetään lyhennysmerkintää $\mathrm{H}^1 := \mathrm{H}^1(0,1)$, kun määrittelyjoukko on asiayhteydestä selvä. Näin on tämän monisteen luvuissa (laita viitteenä ne luvut, joissa käsitellään yksidimensioista tapausta). Avaruuteen H^1 määritellään sisätulo $(\cdot,\cdot)_{\mathrm{H}^1} := (\cdot,\cdot)_{\mathrm{H}^1(0,1)}$

$$(v,w)_{\mathrm{H}^1} := \int_0^1 vw \,\mathrm{d}x + \int_0^1 v'w' \,\mathrm{d}x, \tag{25}$$

joka indusoi luonnollisella tavalla normin $\|\cdot\|_{\mathrm{H}^1} := \|\cdot\|_{\mathrm{H}^1(0,1)}$

$$\begin{aligned}\|v\|_{\mathrm{H}^1} &= \sqrt{(v,v)_{\mathrm{H}^1}} \\ &= \left(\int_0^1 |v|^2 \,\mathrm{d}x + \int_0^1 |v'|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{26}$$

Normin ohella määritellään `seminormi` $|\cdot|_{\mathrm{H}^1} := |\cdot|_{\mathrm{H}^1(0,1)}$, joka toteuttaa kaikki muut tavallisen normin ehdot paitsi definiittisyyden ($\|v\| = 0 \Leftrightarrow v \equiv 0$):

$$|v|_{\mathrm{H}^1} = \left(\int_0^1 |v'|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}} \tag{27}$$

Lemma 1.9 *Avaruus* $\mathrm{H}^1(0,1)$ *varustettuna sisätulolla* (25) *on* ***`Hilbertin avaruus`****.*

□

Joukot $\mathcal{C}^1[0,1]$ ja $\mathcal{C}^\infty[0,1]$ ovat `tiheitä` avaruudessa $\mathrm{H}^1(0,1)$ ja normin (26) määritelmän nojalla

$$\|v\|^2_{\mathrm{H}^1} = \|v\|^2_{\mathrm{L}^2} + |v|^2_{\mathrm{H}^1} \tag{28}$$

Herää kysymys: miten $u(0), v(0)$ ja $v(1)$ ovat määriteltyjä? Aiemmin yhtälössä (9) todettiin ilman perusteluja, että $v(0) = 0$. Perustellaan tämä. Seuraava teoreema, *jälkiteoreema*, on erittäin tärkeä sillä se rajoittaa testifunktion 0-reunan Sobolev-avaruuden normin (26) suhteen.

Lemma 1.10 (jälkioperaattori) *Kaikille* $v \in \mathcal{C}^1[0,1]$ *on olemassa vakio* $C_{tr} > 0$ *siten, että*

$$|v(0)| \leq C_{\mathrm{tr}} \|v\|_{\mathrm{H}^1} \tag{29}$$

Todistus. Analyysin peruslauseen ja kolmioepäyhtälön nojalla voidaan kirjoittaa arvio

$$\begin{aligned}|v(0)| &= v(x) - \int_0^x v'(y) \,\mathrm{d}y \\ &\leq |v(x)| + \int_0^x |v'(y)| \,\mathrm{d}y \\ &\leq |v(x)| + \underbrace{\sqrt{x}\|v'\|_{\mathrm{L}^2}}_{\leq \|v'\|_{\mathrm{L}^2}}\end{aligned} \tag{30}$$

Integrointi x:n suhteen puolittain antaa

$$\begin{aligned}\int_0^1 \underbrace{|v(0)|}_{=\text{vakio}} \,\mathrm{d}x &\leq \int_0^1 |v(x)| \,\mathrm{d}x + \int_0^1 \|v'\|_{\mathrm{L}^2} \,\mathrm{d}x \\ |v(0)| &\leq \int_0^1 |v(x)| \,\mathrm{d}x + \|v'\|_{\mathrm{L}^2} \\ &\overset{(cs)}{\leq} \sqrt{1}\|v\|_{\mathrm{L}^2} + \|v'\|_{\mathrm{L}^2}\end{aligned} \tag{31}$$

Otetaan avuksi hieman geometriaa. Merkitään $a := \|v\|_{\mathrm{L}^2}$ ja $b := \|v'\|_{\mathrm{L}^2}$. Nyt a ja b ovat ei-negatiivisia reaalilukuja, joille voidaan muotoilla $\mathbb{R}^2$:n standardisisätulon $(\cdot,\cdot)$ avulla

$$a + b = 1 \cdot a + 1 \cdot b = ((1,1),(a,b)) = \cos(\alpha)\|(1,1)\|\cdot\|(a,b)\|, \tag{32}$$

missä α on $\mathbb{R}^2$:n vektorien $(1,1)$ ja (a,b) välinen kulma ja $(\cdot,\cdot)$ on $\mathbb{R}^2$:n tavallinen sisätulo[2]. Sijoittamalla normit ehtoon (32) saamme arvion

$$\begin{aligned}
a + b &= \cos(\alpha)\|(1,1)\|\cdot\|(a,b)\| \\
&\le \|(1,1)\|\cdot\|(a,b)\| \\
&= \sqrt{2}\left(a^2 + b^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{2}(\underbrace{\|v\|_{\mathrm{L}^2}^2 + \|v'\|_{\mathrm{L}^2}^2}_{=\|v\|_{\mathrm{H}^1}^2})^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{2}\|v\|_{\mathrm{H}^1}
\end{aligned} \tag{33}$$

Valitaan lemman alussa esitetyksi vakioksi $C_{\mathrm{tr}} = \sqrt{2}$ ja todistus on valmis.

□

Huomautus 1.11 Edellisen todistuksen nojalla voidaan lemmassa 1.10 korvata $v(0)$ termillä $v(y)$ mille tahansa $y \in [0,1]$.

Seuraus 1.12 *Lineaarioperaattorilla $\tilde{\gamma}_0 : \mathcal{C}[0,1] \to \mathbb{R}$, $v \mapsto v(0)$ on yksikäsitteinen laajennus $\gamma_0 : \mathrm{H}^1[0,1] \to \mathbb{R}$ joka on lineaarinen ja rajoitettu (jatkuva) eli $\forall v \in \mathrm{H}^1(0,1)$ on voimassa*

$$|\gamma_0 v(x)| \le C_{\mathrm{tr}}\|v\|_{\mathrm{H}^1}, \tag{34}$$

missä vakio C_{tr} on sama kuin lemmassa 1.10.

Todistus. Lemma 1.10 perusteella $\tilde{\gamma}_0$ on lineaarinen ja rajoitettu H^1-normin suhteen. Koska $\mathcal{C}^1[0,1]$ on tiheä avaruudessa $\mathrm{H}^1(0,1)$, niin kaikilla $v \in \mathrm{H}^1(0,1)$ on olemassa jono $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $v_k \in \mathcal{C}^1[0,1]$ jolle $v_k \to v$ avaruudessa $\mathrm{H}^1(0,1)$. Määritellään nyt

$$\gamma_0 v := \lim_{k\to\infty} \tilde{\gamma}_0 v_k \tag{35}$$

Tämä johtaa hyvin määriteltyyn lineaarioperaattoriin. Osoitetaan ensin operaattorin γ_0 rajoittuneisuus:

$$\begin{aligned}
|\gamma_0 v| &= \lim_{k\to\infty} |\tilde{\gamma}_0 v_k| \\
&\overset{(*)}{\le} \lim_{k\to\infty} C_{\mathrm{tr}}\|v_k\|_{\mathrm{H}^1} \\
&\overset{(\dagger)}{=} C_{\mathrm{tr}}\|\lim_{k\to\infty} v_k\|_{\mathrm{H}^1} \\
&= C_{\mathrm{tr}}\|v\|_{\mathrm{H}^1}
\end{aligned} \tag{36}$$

Kohdassa $(*)$ käytettiin lemmaa 1.10 ja kohdassa $(\dagger)$ suppenevan jonon olemassaoloa (tiheyden nojalla). Seurauksen 1.12 tulosta kutsutaan `sulkeumaperiaatteeksi`. Jatkossa merkitään $v(0) := \gamma_0 v$. Edellinen konstruktio voidaan tehdä mille tahansa pisteelle välillä $[0,1]$ ja tämä selittää myös $v(1)$:den.

[2] Huomaa, että tällä ei ole mitään tekemistä tarkasteltavien Lebesguen ja Sobolevin avaruuksien kanssa, sillä argumentti on puhtaasti geometrinen.

Varoitus.

(1) Jälkioperaattoria *ei voida* laajentaa $L^2(0,1)$:teen.
(2) Korkeissa dimensioissa pisteittäiset arvot eivät ole määriteltyjä $H^1(0,1)$:ssä, mutta jäljet ovat olemassa hieman erilaisella asettelulla.

Kerrataan nyt hieman ja muotoilla samalla uudelleen variaatio-ongelma (β):

> Asetetaan $V = H^1(0,1)$ työavaruudeksi. Määritellään avaruudet
>
> $$\begin{cases} V_0 &= \{v \in V \mid v(0) = 0\} \\ V_g &= \{v \in V \mid v(0) = g_0 \in \mathbb{R}\} \end{cases} \tag{37}$$
>
> Etsi funktio $u \in V_g$, jolle $\forall v \in V_0$ pätee
>
> $$\mathbf{a}(u,v) = \langle F, v\rangle, \tag{38}$$
>
> missä
>
> $$\begin{cases} \mathbf{a}(u,v) &= \int_0^1 au'v' + bu'v + cuv \,\mathrm{d}x \\ \langle F,v\rangle &= \int_0^1 fv \,\mathrm{d}x + g_1 v(1), \quad g_1 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{39}$$

(γ)

Yhtälössä (37) avaruus V_0 on H^1:n lineaarinen aliavaruus ja V_g sen lineaarinen alue (*eng. linear manifold*) eli *siirretty* aliavaruus joka ei kulje nollan kautta (ei ole aliavaruus matem. mielessä). Muotoilussa esiintyvät vakiot a, b ja c on rajoitettu yhtälön (12) tapaan ja lisäksi f:n tulee olla integroituva tarkasteluvälillä.

Muotoilua (γ) kutsutaan `lineaariseksi variaatio-ongelmaksi`, tässä monisteessa myös silloin kun käsiteltävät avaruudet V, V_0, V_g ja funktionaali F ovat yleisiä. Osittaisdifferentiaaliyhtälöiden kontekstissa (ks. klassinen ongelma α) ratkaisu $u \in V_g$ ongelmalle (γ) on *heikko ratkaisu* yhtälöille klassiselle ongelmalle. Jatkossa keskitytään nimenomaan heikon ratkaisun löytämiseen

Määritelmä 1.13 Kuvaus $\mathbf{b} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ Hilbertin avaruudelta $\mathcal{H}$ on `bilineaarinen muoto`, joss se on lineaarinen molempien komponenttien suhteen eli kaikille $u, w, v \in \mathcal{H}$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$ on voimassa

(i) $\mathbf{b}(u + w, v) = \mathbf{b}(u, v) + \mathbf{b}(w, v)$
(ii) $\mathbf{b}(u, v + w) = \mathbf{b}(u, v) + \mathbf{b}(u, w)$
(iii) $\mathbf{b}(\lambda u, v) = \lambda \mathbf{b}(u, v)$
(iv) $\mathbf{b}(u, \lambda v) = \lambda \mathbf{b}(u, v)$

Merkinnöistä. Olkoon $G : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ lineaarinen funktionaali. Merkitään jatkossa $\langle G, v\rangle = G(v)$.

Esimerkki 1.14 (variaatiomuotoilu malliongelmalle) Klassinen malliongelma esimerkissä (1.2) muuntuu seuraavaksi variaatio-ongelmaksi: Määritellään avaruudet V_0 ja V_g kuten muotoilussa (γ). Etsi $u \in V_g$ siten, että kaikille $v \in V_0$ on voimassa

$$\underbrace{\int_0^1 u'(x)v'(x)\,\mathrm{d}x}_{=\mathbf{a}(u,v)} = \underbrace{\int_0^1 f(x)v(x)\,\mathrm{d}x + g_1 v(1)}_{=\langle F,v\rangle} \tag{40}$$

Varoitus. Erilaiset tarkasteltavan ongelman reunaehdot voivat muuttaa avaruuksien V_0 ja V_g sekä bilineaarimuodon $\mathbf{a}(\cdot,\cdot)$ sekä funktio $f(x)$ määrittelyjä (ks. laskuharjoitus 4.1)

Yleisesti klassisesta ratkaisusta *ei seuraa* heikko ratkaisu. Jos oletetaan ratkaisun $u(x)$ olemassaolo klassiselle ongelmalle (α) ehdoin (4) sekä (5), niin $u'(x) \in \mathrm{L}^2(0,1)$ ei välttämättä ole totta. Vain, kun on voimassa *lisäoletuksia*, esimerkiksi $u \in \mathcal{C}^2[0,1]$, niin klassisesta ratkaisusta seuraa heikko ratkaisu Onko muotoilua (γ) vastaava heikko ratkaisu myös klassinen ratkaisu? Olkoon $u(x) \in V_g$ tämä ratkaisu ja oletetaan lisäksi ehdot (4) ja (5). Johdetaan tässä erikoistapauksessa klassinen ratkaisu. Integrointi osissa taaksepäin bilineaarimuodon (39) ensimmäiselle termille antaa

$$\begin{aligned}\int_0^1 au'v' + bu'v + cuv \,\mathrm{d}x &= au'v'\Big|_0^1 \int_0^1 -(au')v + bu'v + cuv \,\mathrm{d}x \\ &\overset{(*)}{=} a(1)u'(1)v(1) + \int_0^1 [-(au') + bu' + cu]v \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 fv \,\mathrm{d}x + g_1 v(1)\end{aligned} \tag{41}$$

Kohdassa $(*)$ on käytetty ehtoa $v(0) = 0$. Jos nyt rajoitetaan testifunktio v kompaktiin tukeen (ks. määritelmä 1.3) tarkasteluvälillä eli $v \in \mathcal{C}_0^\infty(0,1)$, niin

$$\int_0^1 \left[-(au') + bu' + cu - f\right] v \,\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall v \in \mathcal{C}_0^\infty(0,1) \tag{42}$$

Yhtälö (42) seuraa siitä että tuki on jatkuva ja suljettu rajoitetulla välillä, joten tulee olla $v(1) = 0 = v(0)$ kun $v \in \mathcal{C}_0^\infty(0,1)$. Koska $\mathcal{C}_0^\infty(0,1)$ on tiheä avaruudessa $\mathcal{C}[0,1]$, niin analyysin perustuloksista saadaan nyt klassinen yhtälö (1):

$$-(au') + bu' + cu - f = 0 \qquad \forall x \in (0,1) \tag{43}$$

Kun katsotaan yhtälöä (41), niin edellisen nojalla kaikille $v \in V_0$ on $a(1)u'(1)v(1) = g_1 v(1)$ eli saadaan Neumannin reunaehto (ks. (3)) $a(1)u'(1) = g_1$. Dirichletin ehto $u(0) = g_0$ (ks. (2)) seuraa puolestaan avaruuden V_0 määritelmästä.

1.3 Lax-Milgramin teoreema

Tarkastellaan, milloin muotoilulla (γ) on olemassa *yksikäsitteinen* ratkaisu ja onko se jatkuvasti riippuva datasta eli onko ongelma `hyvin asetettu`. Katsotaan ensin abstraktia tapausta ja palataan sitten edellisen luvun variaatio-ongelmaan.

Lax-Milgramin teoreema on sen verran kova tulos, että lähestytään sitä varovasti askel kerrallaan. Yleinen muotoilu esitetään sivulla 9 ja todistus sivulla 14.

Abstrakti ongelma. Olkoon $\mathbf{b} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ bilineaarinen muoto, $\mathcal{H}$ reaalinen[3] Hilbertin avaruus ja $G : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ lineaarinen funktionaali. Tavoitteena on löytää funktio

[3] Kun jatkossa puhutaan Hilbertin avaruuksista, tarkoitetaan kerroinkunnaltaan *reaaliarvoista* avaruutta ellei toisin mainita. Reaaliarvoisessa Hilbertin avaruudessa sisätulo on symmetrinen (vrt. konjugaattilineaarinen kompleksisessa tapauksessa; muutamat jatkossa esitettävät todistukset nojaavat juuri symmetrisyyteen. . .).

$u \in \mathcal{H}$, jolle $\forall v \in \mathcal{H}$ pätee

$$\mathbf{b}(u, v) = \langle G, v \rangle, \tag{44}$$

Variaatio-ongelma (γ) voidaan kirjoittaa muodossa (44), sillä $V_g = g_0 + V_0 = \{g_0 + v \mid v \in V_0\}$ missä g_0 on vakiofunktio ($u(x) = g_0$). Näin ollen $u = g_0 + u_0$, $u_0 \in V_0$. Etsitään u_0:

$$\begin{aligned} \underbrace{\mathbf{a}(g_0 + u_0, v)}_{=\mathbf{a}(g_0,v)+\mathbf{a}(u_0,v)} &= \langle F, v \rangle \\ \Rightarrow a(u_0, v) &= \langle F, v \rangle - a(g_0, v) \equiv \langle \hat{F}, v \rangle, \end{aligned} \tag{45}$$

missä $\hat{F}$ on lineaarinen funktionaali. Täten probleema (γ) kirjoitetaan abstraktissa muodossa seuraavasti:

$$\boxed{\text{Etsi funktio } u_0 \in V_0, \text{ jolle } \forall v \in V_0 \text{ pätee} \quad \mathbf{a}(u_0, v) = \langle \hat{F}, v \rangle.} \tag{δ}$$

Varoitus. Yleensä homogenisointi vaatii lisäoletuksen, että on olemassa $g \in V_g$ siten että $V_g = g + V_0$, ts. tämä ei automaattisesti ole voimassa.

Lax-Milgram muotoilu

Ennen varsinaista Lax-Milgramin teoreeman esittämistä tarvitaan muutamia määritelmiä funktionaalianalyysistä.

Määritelmä 1.15 Duaaliavaruus

$$\mathcal{H}^* := \{F : \mathcal{H} \to \mathbb{R} \mid F \text{ lineaarinen ja rajoitettu normin } \|\cdot\|_{\mathcal{H}^*} \text{ suhteen}\} \tag{46}$$

Edelleen määritellään duaalinormi

$$\|F\|_{\mathcal{H}^*} := \sup_{\substack{w \in \mathcal{H} \\ w \neq 0}} \frac{|\langle F, w \rangle|}{\|w\|_{\mathcal{H}}} \tag{47}$$

Määritelmä 1.16 (elliptisyys ja rajoittuneisuus) Bilineaarinen muoto $\mathbf{b} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ on `elliptinen` (eng. *coercive, elliptic*), jos kaikille $v \in \mathcal{H}$ on olemassa $\mu_1 > 0$ siten että

$$\mathbf{b}(v, v) \geq \mu_1 \|v\|^2_{\mathcal{H}} \tag{48}$$

Vastaavasti määritelty muoto $\mathbf{b}(v, w)$ on `rajoitettu` $\mathcal{H}$:ssä, jos kaikilla $v, w \in \mathcal{H}$ $\exists\, \mu_2 > 0$ s.e.

$$\mathbf{b}(v, w) \leq \mu_2 \|v\|_{\mathcal{H}} \|w\|_{\mathcal{H}} \tag{49}$$

Seuraavaksi esitetään Lax-Milgramin teoreeman yleinen muotoilu.

Lause 1.17 (Lax-Milgram) *Olkoon $\mathcal{H}$ Hilbertin avaruus, $G \in \mathcal{H}^*$, $\mathbf{b} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ elliptinen ja rajoitettu bilineaarinen muoto vakioilla μ_1 ja μ_2. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen $u \in \mathcal{H}$ ongelmalle (44) ja*

$$\frac{1}{\mu_2} \|G\|_{\mathcal{H}^*} \leq \|u\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{\mu_1} \|G\|_{\mathcal{H}^*} \tag{50}$$

Lauseen todistus esitetään myöhemmin sivulla 14. Sovellus teoreeman käytöstä on demotehtävässä $\boxed{08}$ (laita viite loppuosaan).

Katsotaan nyt Lax-Milgramia ja sen oletusten voimassaoloa variaatiomuotoilun homogenisoidun version (δ) tilanteessa. Lauseen 1.17 määrittelyehdoista saadaan vastaavuudet $\mathbf{b} \leftrightarrow \mathbf{a}$, $G \leftrightarrow \hat{F}$ ja $\mathcal{H} \leftrightarrow V_0$. Lauseen 1.17 oletukset ovat voimassa, kun

(i) $\mathbf{a} : V_0 \times V_0 \to \mathbb{R}$ on V_0-elliptinen ja V_0-rajoitettu bilineaarimuoto

(ii) $\hat{F} \in V_0^*$ eli $\hat{F}$ on rajoitettu.

Harjoitustehtävänä voidaan osoittaa, että homogenisoimattomasta variaatio-ongelmasta (γ)tapauksesta saadaan edellä esitetty muotoilu

Osoitetaan alkuun, että $F \in \mathrm{H}^1(0,1)^*$. Tämä saadaan helpost arvioimalla

$$\begin{aligned} |\langle F, v\rangle| &\leq \int_0^1 |fv| \, \mathrm{d}x + |g_1| \cdot \underbrace{|v(1)|}_{1.10} \\ &\overset{(cs)}{\leq} \|f\|_{\mathrm{L}^2} \|v\|_{\mathrm{L}^2} + |g_1| C_{\mathrm{tr}} \|v\|_{\mathrm{H}^1} \\ &\leq \left(\|f\|_{\mathrm{L}^2} + C_{\mathrm{tr}} |g_1|\right) \|v\|_{\mathrm{H}^1}, \end{aligned} \tag{51}$$

joten rajoittuneisuus on ok (ks. määritelmä 1.16). Bilineaarimuodolle $\mathbf{a}(v,w)$, $v,w \in V_0$ saadaan rajoittuneisuus vastaavantapaisella arvioinnilla kuin yhtälössä (12) käyttäen Cauchyn epäyhtälöä sekä funktionaalianalyysin perustuloksia. Tulos on (harjoitustehtävä!)

$$|\mathbf{a}(v,w)| \leq (\|a\|_{\mathrm{L}^\infty} + \|b\|_{\mathrm{L}^\infty} + \|c\|_{\mathrm{L}^\infty}) \|v\|_{\mathcal{H}} \|w\|_{\mathcal{H}} \tag{52}$$

Nyt kirjoitetaan pari hyödyllistä aputulosta, jotka tunnetaan `Friedrichsin` ja `Poincarén` epäyhtälöinä.

Lemma 1.18 (Friedrichsin epäyhtälö) *Olkoon $v \in \mathrm{H}^1(0,1)$, $v(0) = 0$. Tällöin on olemassa vakio $C_{\mathrm{F}} > 0$ siten, että*

$$\|v\|_{\mathrm{L}^2} \leq C_{\mathrm{F}} |v|_{\mathrm{H}^1}. \tag{53}$$

Todistus. Todistetaan väite tapaukselle $v \in \mathcal{C}[0,1]$ (yleinen tapaus $v \in \mathrm{H}^1(0,1)$ seuraa sulkeumaperiaatteesta). Reaalianalyysin tulosten nojalla mielivaltaiselle $x \in [0,1]$ on voimassa

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_0^x v'(y) \, \mathrm{d}y \\ \Rightarrow |v(x)| &\leq \int_0^x |v'(y)| \, \mathrm{d}y \\ &\leq \sqrt{x} \Big(\underbrace{\int_0^x |v'(y)|^2 \, \mathrm{d}y}_{\leq |v|_{\mathrm{H}^1}} \Big)^{1/2} \end{aligned} \tag{54}$$

Neliöinti ja integrointi x:n suhteen yli laskennallisen alueen antaa

$$\begin{aligned} \int_0^1 |v(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \|v\|_{\mathrm{L}^2}^2 &\leq \int_0^1 x \cdot |v|_{\mathrm{H}^1}^2 \\ &= \frac{1}{2} |v|_{\mathrm{H}^1}^2, \end{aligned} \tag{55}$$

eli väitetty epäyhtälö on voimassa valinnalla $C_{\mathrm{F}} = 1/\sqrt{2}$. Yleinen tapaus seuraa sulkeumaperiaatteesta, ts. $\mathcal{C}[0,1]$ on tiheä avaruudessa $\mathrm{H}^1(0,1)$ ja kaikki epäyhtälön ilmaukset ovat jatkuvia $\|\|_{\mathrm{H}^1}$:n suhteen.

□

Huomautus 1.19 Sama todistus edelliseen pätee kaikilla $v \in \mathrm{H}^1(0,1)$, kun $v(\tilde{x}) = 0$ jollekin $x \in [0,1]$. Toisaalta, tulos ei päde kaikille $v \in \mathrm{H}^1(0,1)$.

Lemma 1.20 (Poincarén epäyhtälö) *Olkoon $v \in \mathrm{H}^1(0,1)$. Tällöin on olemassa vakio C_{P} siten, että*

$$\|v\|_{\mathrm{L}^2} \leq C_{\mathrm{P}} \left[|v|^2_{\mathrm{H}^1} + \left(\int_0^1 |v(x)| \, \mathrm{d}x \right)^2 \right]^{1/2}. \tag{56}$$

Todistus. Laskuharjoitustehtävä $\boxed{6}$.

□

Huomautus 1.21 (keskimääräinen arvo) Kun määritellään `keskimääräinen arvo` $\bar{v}$ siten, että

$$\bar{v} := \frac{\int_0^1 v(x) \, \mathrm{d}x}{\int_0^1 1 \, \mathrm{d}x} = \int_0^1 v(x) \, \mathrm{d}x, \tag{57}$$

niin Friedrichsin epäyhtälö (53) antaa $\|v\|_{\mathrm{L}^2} \leq C_{\mathrm{F}} |v|_{\mathrm{H}^1}$ kaikilla $v \in \mathrm{H}^1(0,1)$ joilla $\bar{v} = 0$, ja $\|v - \bar{v}\|_{\mathrm{L}^2} \leq C_{\mathrm{F}} |v|_{\mathrm{H}^1}$ kaikilla $v \in \mathrm{H}^1(0,1)$.

Edellä määriteltyjen tulosten avulla voidaan tarkistaa Lax-Milgramin oletuksiin liittyen variaatiomuotoillussa malliongelmassa (ks. esimerkki 1.14) esiintyvän bilineaarimuodon $\mathbf{a}(\cdot,\cdot)$ elliptisyys.

Esimerkki 1.22 (malliprobleeman V_0-elliptisyys) Kun $v \in V_0$, niin yhtälöstä (40) saadaan bilineaarimuodoksi

$$\mathbf{a}(v,v) = \int_0^1 v'(x)^2 \, \mathrm{d}x = |v|^2_{\mathrm{H}^1} \tag{58}$$

Friedrichs (53) antaa $\|v\|^2_{\mathrm{L}^2} \leq C_{\mathrm{F}}^2 |v|^2_{\mathrm{H}^1}$. Kun lisätään tämän molemmille puolille termi $|v|^2_{\mathrm{H}^1}$, saadaan

$$\underbrace{\|v\|^2_{\mathrm{L}^2} + |v|^2_{\mathrm{H}^1}}_{=\|v\|^2_{\mathrm{H}^1}} \leq (1 + C_{\mathrm{F}}^2) \underbrace{|v|^2_{\mathrm{H}^1}}_{=\mathbf{a}(v,v)} \Rightarrow \mathbf{a}(v,v) \geq \frac{1}{\sqrt{1 + C_{\mathrm{F}}^2}} \|v\|_{\mathrm{H}^1}. \tag{59}$$

Huomautus 1.23 Vastaavanlaisia elliptisyytodistuksia kuin esimerkissä 1.22 on laskuharjoituksessa 4.3.

Varoitus. Elliptisyys *ei ole* yleisesti voimassa.

Riesz:n esitysteoreema

Määritellään yksinkertainen abstrakti ongelma seuraavasti.

Olkoon $\mathcal{H}$ Hilbertin avaruus, $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}}$ sen symmetrinen sisätulo ja $G \in \mathcal{H}^*$ annettu operaattori. Etsi funktio $u \in \mathcal{H}$ siten, että $\forall v \in \mathcal{H}$ on voimassa $(u,v)_{\mathcal{H}} = \langle G, v\rangle$.	(ε)

Lemma 1.24 *Olkoon $\mathcal{H}$ Hilbertin avaruus, $G \in \mathcal{H}^*$, $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}}$ symmetrinen sisätulo. Abstrakti variaatio-ongelma ε on ekvivalentti seuraavan minimointiongelman kanssa:*

Etsi $u \in \mathcal{H}$ siten, että $$\mathcal{J}(u) = \min_{v\in H} \mathcal{J}(v), \quad \text{missä} \quad \mathcal{J}(v) := \frac{1}{2}(v,v)_{\mathcal{H}} - \langle G, v\rangle, \quad (60)$$ eli $\mathcal{J}$ on **`neliöllinen funktionaali`**. $\forall v \in \mathcal{H}$ on lisäksi voimassa $(u,v)_{\mathcal{H}} = \langle G, v\rangle$.	(ζ)

Todistus. Olkoon $t \in [0,1]$ ja $w \in \mathcal{H}$. Koska minimi saavutetaan funktiolle u, niin

$$\begin{aligned}
&\mathcal{J}(u) = \min_{v\in H} \mathcal{J}(v) \\
\Leftrightarrow\ &\mathcal{J}(u) \le \mathcal{J}(u+tw) \\
&\quad= \frac{1}{2}(u+tw, u+tw)_{\mathcal{H}} - \langle G, u+tw\rangle \\
&\quad= \frac{1}{2}(u,u)_{\mathcal{H}} - \langle G,u\rangle + \frac{t^2}{2}(w,w)_{\mathcal{H}} + t(u,w)_{\mathcal{H}} - t\langle G,w\rangle \\
\Leftrightarrow\ &\mathcal{J}(u) \le \mathcal{J}(u) + t\left[(u,w)_{\mathcal{H}} - \langle G,w\rangle\right] + \frac{t^2}{2}(w,w)_{\mathcal{H}} \\
&\Leftrightarrow 0 \overset{(*)}{\le} (u,w)_{\mathcal{H}} - \langle G,w\rangle + \underbrace{\frac{t}{2}}_{\ge 0}\underbrace{(w,w)_{\mathcal{H}}}_{\ge 0}
\end{aligned} \tag{61}$$

Kohdassa $(*)$ otettiin parametri t yhteiseksi tekijäksi. Koska $(w,w)_{\mathcal{H}} \ge 0$, $t \ge 0$ ja yhtälön (61) viimeisen rivin tulee olla voimassa $\forall t \in [0,1]$, ts. myös mielivaltaisen pienelle t, saadaan väite.

□

Lause 1.25 *Olkoon $\mathcal{H}$ Hilbertin avaruus, $G \in \mathcal{H}^*$. Tällöin on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu $u \in \mathcal{H}$ ongelmaan (ε)=(ζ), ja $\|u\|_{\mathcal{H}} = \|G\|_{\mathcal{H}^*}$.*

Todistus. Osoitetaan ensin ratkaisun olemassaolo.

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}(v) &= 1/2\,\underbrace{(v,v)_{\mathcal{H}}}_{=\|v\|^2_{\mathcal{H}}} - \langle G, v\rangle \\
&\ge 1/2\|v\|^2_{\mathcal{H}} - \|G\|_{\mathcal{H}^*}\|v\|_{\mathcal{H}} + \underbrace{1/2\|G\|^2_{\mathcal{H}^*} - 1/2\|G\|^2_{\mathcal{H}^*}}_{=0} \\
&\ge -1/2\|G\|^2_{\mathcal{H}^*} \\
\Rightarrow\ &\inf_{v\in\mathcal{H}} \mathcal{J}(v) > -\infty
\end{aligned} \tag{62}$$

Yhtälöstä (62) seuraa, että on olemassa jono $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{H}$, jolle

$$\mathcal{J}(u_k) \to \inf_{v\in\mathcal{H}} \mathcal{J}(v) \tag{63}$$

Osoitetaan, että (u_k) on `Cauchy-jono`[4].

$$\begin{aligned}
\|u_k - u_l\|_{\mathcal{H}} &\overset{(*)}{=} 2\|u_k\|^2_{\mathcal{H}} + 2\|u_k\|^2_{\mathcal{H}} - \|u_k + u_l\|_{\mathcal{H}} \\
&= \underbrace{2\|u_k\|^2_{\mathcal{H}} - 4\langle G, u_k\rangle}_{=4\,\mathcal{J}(u_k)} + \underbrace{2\|u_l\|^2_{\mathcal{H}} - 4\langle G, u_l\rangle}_{=4\,\mathcal{J}(u_l)} - \\
&\quad - \underbrace{\left(\|u_k + u_l\|^2_{\mathcal{H}} - 4\langle G, u_k + u_l\rangle\right)}_{=8\,\mathcal{J}[(u_k+ul)/2]} \\
&= 4\left[\mathcal{J}(u_k) + \mathcal{J}(u_l) - 2\,\mathcal{J}({}^{u_k+u_l}/{}_2)\right] \\
&\le 4\left[\mathcal{J}(u_k) + \mathcal{J}(u_l)\right] - 8\inf_{v\in\mathcal{H}} \mathcal{J}(v) \\
&\xrightarrow{k,l\to\infty} 0.
\end{aligned} \tag{64}$$

Kohdassa $(*)$ käytettiin ns. **`suunnikassääntöä`**, joka voidaan helposti johtaa tarkastelemalla sisätulojen $(u_k - u_l, u_k - u_l)$ ja $(u_k + u_l, u_k + u_l)$ summaa. Lisäksi yhtälön (64) viimeisellä rivillä ehdon (63) perusteella raja-arvo menee nollaan. Koska $\mathcal{H}$ on täydellinen, niin $u \in \mathcal{H}$, ts. avaruus sisältää alkion jota kohden Cauchy-jono suppenee. Edelleen, koska $\mathcal{J}$ on jatkuva funktionaali niin $\lim_{k\to\infty} \mathcal{J}(u_k) = \inf_{v\in\mathcal{H}} \mathcal{J}(v) = \mathcal{J}(u)$.

Näytetään nyt, että saatu ratkaisu on yksikäsitteinen. Olkoot u_1 ja u_2 variaatio-ongelman (ε) ratkaisuja. Tällöin täytyy olla

$$\begin{cases} (u_1, v)_{\mathcal{H}} &= \langle G, v\rangle \\ (u_2, v)_{\mathcal{H}} &= \langle G, v\rangle \end{cases} \tag{65}$$

Vähentämällä yhtälöt toisistaan saamme $(u_1 - u_2, v)_{\mathcal{H}} = 0$ kaikille $v \in \mathcal{H}$, joten valinnalla $v = u_1 - u_2$ ja Hilbertin avaruuden normin $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ definiittisyyden nojalla $u_1 - u_2 = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$.

Viimeiseksi vielä todetaan identiteetti $\|u\|_{\mathcal{H}} = \|G\|_{\mathcal{H}^*}$. Esitetään alkuun perustelut sille, että

$$\|u\|_{\mathcal{H}} = \sup_{\substack{v\in\mathcal{H}\\ v\neq 0}} \frac{|(u,v)_{\mathcal{H}}|}{\|v\|_{\mathcal{H}}} \tag{66}$$

Ensinnäkin yhtälö (66) on voimassa suuntaan $(\le)$, sillä $u \in \mathcal{H}$ ja valitaan supremumia joukosta, joka sisältää u:n lisäksi myös muuta (yhtäsuuruus juuri u:n tapauksessa). Toisaalta, supremumin suora arviointi Cauchy-Schwarzin epäyhtälöllä (170) antaa suunnan $(\ge)$. Nyt saadaan

$$\|u\|_{\mathcal{H}} = \sup_{\substack{v\in\mathcal{H}\\ v\neq 0}} \frac{|(u,v)_{\mathcal{H}}|}{\|v\|_{\mathcal{H}}} = \sup_{\substack{v\in\mathcal{H}\\ v\neq 0}} \frac{|\langle G, v\rangle|}{\|v\|_{\mathcal{H}}} = \|G\|_{\mathcal{H}^*}, \tag{67}$$

joten väite on todistettu.

$\square$

Otetaan nyt kaksi suhteellisen syvällistä matemaattista tulosta avuksi Lax-Milgramin teoreeman yleisen muodon 1.17 todistamiseksi (konstruktiivinen todistus seuraa näitä tuloksia). Aputulosten todistuksia ei esitetä tässä yhteydessä

[4] Kun jonoindeksit k ja l ovat tarpeeksi suuria, niin $\|u_k - u_l\|$ saadaan mv. pieneksi.

Määritelmä 1.26 (Rieszin isomorfismi) Olkoon kuvaus

$$\mathcal{R} : \mathcal{H}^* \to \mathcal{H},\ G \mapsto u_G \quad \text{ja} \quad (u_G, v)_{\mathcal{H}} = \langle G, v\rangle\ \forall v \in \mathcal{H} \tag{68}$$

lineaarinen bijektio. Tällöin on olemassa käänteiskuvaus

$$\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{I} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*,\ u \mapsto G_u \quad \text{missä} \quad \langle G_u, v\rangle = (u, v)_{\mathcal{H}}\ \forall v \in \mathcal{H}\,. \tag{69}$$

Lisäksi $\mathcal{R}$ on `isometria` eli säilyttää normin, ts. $\|RG\|_{\mathcal{H}} = \|G\|_{\mathcal{H}^*}$. Kuvausta $\mathcal{R}$ kutsutaan `Rieszin isomorfismiksi`.

Seuraavaksi esitettävä *Banachin kiintopistelause* on melko syvällinen topologian / funktionaalianalyysin tulos.

Lause 1.27 (Banachin kiintopistelause) *Olkoon W Banachin avaruuden V suljettu osajoukko ja $\phi : W \to W$ kontraktio, ts. on olemassa reaaliluku $q < 1$ siten, että kaikille $v, w \in W$ pätee*

$$\|\phi(v) - \phi(w)\| \leq q\|v - w\| \tag{70}$$

Tällöin on olemassa yksikäsitteinen elementti $u \in W$, jolle

$$u = \phi(u) \tag{71}$$

Lisäksi jono $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, joka etenee kiintopisteiteraatiolla

$$u_{k+1} = \phi(u_k) \tag{72}$$

konvergoi ratkaisuun u mielivaltaisella alkuarvauksella $u_0 \in W$. Edelleen kaikilla $k \in \mathbb{N}$ on voimassa ehto

$$\|u_{k+1} - u\| \leq q\|u_k - u\| \tag{73}$$

Todistus. Banachin kiintopistelauseen todistus löytyy funktionaalianalyysin perusteoksista.

□

Johdetaan seuraavassa yleiselle Hilbertin avaruudelle $\mathcal{H}$ ehdot, jotka määräävät milloin Banachin kiintopistelauseen oletukset ovat voimassa Lax-Milgramin teoreemaan liittyen. Olkoon $\mathbf{b}(\cdot,\cdot)$ rajoitettu ja elliptinen bilineaarinen muoto (kuten lauseessa 1.17). Määritellään operaattori

$$\mathcal{B} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^*,\ w \mapsto \mathcal{B}\,w \quad \text{missä} \quad \langle \mathcal{B}\,w, v\rangle := \mathbf{b}(w, v)\ \forall v \in \mathcal{H} \tag{74}$$

Nähdään, että $\mathcal{B}\,w \in \mathcal{H}^*$ ja yleisesti havaitaan seuraavat vastaavuudet:

$$\begin{aligned} \text{raj. bilineaarinen muoto} &\leftrightarrow \text{raj. lineaarinen operaattori} \\ b : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R} &\leftrightarrow \mathcal{B} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^* \\ \text{sisätulo } (\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}} &\leftrightarrow \mathcal{I} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}^* \end{aligned}$$

Todistus. Lax-Milgram Esitetään nyt todistus lauseelle 1.17. Kirjoitetaan abstrakti ongelma (44) operaattorin $\mathcal{B}$ avulla, ts. etsitään $u \in \mathcal{H}$ jolle pätee

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(u, v) = \langle \mathcal{B}\,v, v\rangle &= \langle G, v\rangle \\ \Leftrightarrow \mathcal{B}\,u &= G \\ \mathcal{B}\,u - G &= 0 \\ \mathcal{R}(\mathcal{B}\,u - G) &= 0 \qquad \mid \quad \text{olkoon } \tau > 0 \\ u + \tau\,\mathcal{R}(\mathcal{B}\,u - G) &= u \end{aligned} \tag{75}$$

Yhtälössä (75) $\mathcal{R}$ on Rieszin isomorfismi (tarvitaan, jotta voidaan laskea yhteen u ja $G - \mathcal{B}u$) ja $\tau > 0$ reaaliluku, jonka merkitys selviää pikapuoliin. Määritellään nyt Banachin kiintopistelauseessa 1.27 esitelty kuvaus ϕ seuraavasti:

$$\phi(u) = \phi_\tau(u) := u + \tau\mathcal{R}(\mathcal{B}u - G) = \underbrace{(\mathbb{I} - \tau\mathcal{R}\mathcal{B})}_{:=\mathrm{M}_\tau} v + \tau\mathcal{R}G \tag{76}$$

Jos nyt ϕ_τ on kontraktio ja u abstraktin ongelman (44) ratkaisu, niin Banachin lauseen nojalla kiintopisteiteraatio

$$u_{k+1} = \phi_\tau(u_k) = u_k + \tau\underbrace{\mathcal{R}(\mathcal{B}u_k - G)}_{=w_k} = u_k + \tau w_k \tag{77}$$

suppenee kohti ratkaisua u ehdon (73) mukaisesti. Katsotaan siis seuraavaksi, millä ehdoilla kuvaus ϕ_τ on kontraktio. Kun $v, w \in \mathcal{H}$ ovat mielivaltaisia ja $q < 1$, niin yhtälöstä (70) saadaan

$$\|\underbrace{\phi_\tau(v) - \phi_\tau(w)}_{=\mathrm{M}_\tau(v)-\mathrm{M}_\tau(w)}\| \le \|\mathrm{M}_\tau\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})}\|v - w\| \le q\|v - w\| \tag{78}$$

Tavoitteena on siis $\|\mathrm{M}_\tau\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})} < 1$. Arvioidaan operaattorin M_τ normia[5] :

$$\begin{aligned}\|\mathrm{M}_\tau v\|^2_{\mathcal{H}} &= (\mathrm{M}_\tau v, \mathrm{M}_\tau v)_{\mathcal{H}} \\ &= (v - \tau\mathcal{R}\mathcal{B}v, v - \tau\mathcal{R}\mathcal{B}v)_{\mathcal{H}} \\ &= (v, v)_{\mathcal{H}} - 2\tau(\mathcal{R}\mathcal{B}v, v)_{\mathcal{H}} + \tau^2(\mathcal{R}\mathcal{B}v, \mathcal{R}\mathcal{B}v)_{\mathcal{H}}\end{aligned} \tag{79}$$

Koska Rieszin isomorfismi ei muuta normia, niin keskimmäiselle termille $(\mathcal{R}\mathcal{B}v, v)_{\mathcal{H}}$ saadaan bilineaarimuodon $\mathbf{b}(v, v)$ elliptisyyden nojalla arvio

$$(\mathcal{R}\mathcal{B}v, v)_{\mathcal{H}} = \langle\mathcal{B}v, v\rangle = \mathbf{b}(v, v) \ge \mu_1\|v\|^2_{\mathcal{H}} \tag{80}$$

Vastaavasti viimeinen termi $(\mathcal{R}\mathcal{B}v, \mathcal{R}\mathcal{B}v)_{\mathcal{H}}$ saadaan kuriin $\mathcal{R}$:n määritelmän ja $\mathbf{b}(\cdot,\cdot)$:n rajoittuneisuuden avulla:

$$\begin{aligned}(\mathcal{R}\mathcal{B}v, \mathcal{R}\mathcal{B}v)_{\mathcal{H}} = \|\mathcal{R}\mathcal{B}v\|^2_{\mathcal{H}} = \|\mathcal{B}v\|^2_{\mathcal{H}^*} &= \left(\sup_{\substack{w\in\mathcal{H}\\ w\neq 0}} \frac{|\langle\mathcal{B}v, w\rangle|}{\|w\|_{\mathcal{H}}}\right)^2 \\ &= \left(\sup_{\substack{w\in\mathcal{H}\\ w\neq 0}} \frac{|\mathbf{b}(v, w)|}{\|w\|_{\mathcal{H}}}\right)^2 \\ &\overset{(raj.)}{\le} \left(\mu_2 \sup_{\substack{w\in\mathcal{H}\\ w\neq 0}} \frac{\|v\|_{\mathcal{H}}\|w\|_{\mathcal{H}}}{\|w\|_{\mathcal{H}}}\right)^2 \\ &= \mu_2^2\|v\|^2_{\mathcal{H}}\end{aligned} \tag{81}$$

Sijoitetaan arviot (80) ja (81) yhtälöön (79) ja saadaan

$$\begin{aligned}\|\mathrm{M}_\tau v\|^2_{\mathcal{H}} &\le \underbrace{(v, v)_{\mathcal{H}}}_{=\|v\|^2_{\mathcal{H}}} - 2\tau\mu_1\|v\|^2_{\mathcal{H}} + \tau^2\mu_2^2\|v\|^2_{\mathcal{H}} \\ &= \left(1 - 2\tau\mu_1 + \tau^2\mu_2^2\right)\|v\|^2_{\mathcal{H}} \\ \Rightarrow \|\mathrm{M}_\tau\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})} &\le q(\tau) := \sqrt{1 - 2\tau\mu_1 + \tau^2\mu_2^2}\end{aligned} \tag{82}$$

[5] Huomaa, että reaalisessa Hilbertin avaruudessa sisätulo on symmetrinen operaatio. Lemmassa 1.32 tutkitaan tapausta, jossa koko bilineaarinen muoto $\mathbf{b}(\cdot,\cdot)$ on symmetrinen.

Nyt kiinnostaa tietää, millä positiivisella välillä kuvaus $q(\tau)$ on kontraktio, ts. $q(\tau) \leq 1$. Ratkaisemalla helppo toisen asteen epäyhtälö saadaan sopivaksi väliksi $\tau \in [0, {}^{2\mu_1}/{}_{\mu_2^2}]$, ts. tällä välillä kuvaus ϕ_τ on kontraktio. Minimin funktio $q(\tau)$ saavuttaa välin keskipisteessä $\tau_{\text{opt}} = {}^{\mu_1}/{}_{\mu_2^2}$; tämä selviää derivoimalla sekä funktion muodosta. Sijoitetaan τ_{opt} funktion q lausekkeeseen:

$$q(\tau_{\text{opt}}) = \sqrt{1 - 2\frac{\mu_1^2}{\mu_2^2} + \frac{\mu_1^2}{\mu_2^2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2} < 1. \tag{83}$$

Tiivistetään oleelliset seikat. Kun $\tau \in [0, {}^{2\mu_1}/{}_{\mu_2^2}]$, niin kuvaus ϕ_τ on kontraktio ja Banachin teoreeman 1.27 nojalla on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu $u \in \mathcal{H}$ ongelmaan (75), joka on ekvivalentti abstraktin ongelman (44) kanssa.

Lisäksi ratkaisu voidaan löytää kiintopisteiteraatiolla (77). Kun $v \in \mathcal{H}$, saadaan iteraatiolle

$$\begin{aligned} w_k &= \mathcal{R}(\mathcal{B}\, u_k - G \\ \Leftrightarrow \mathcal{I}\, w_k &= \mathcal{B}\, u_k - G \qquad | \; \mathcal{I} = \mathcal{R}^{-1} \\ \Leftrightarrow \langle \mathcal{I}\, w_k, v\rangle &= \langle \mathcal{B}\, u_k, v\rangle - \langle G, v\rangle \\ \Leftrightarrow (w_k, v)_{\mathcal{H}} &= \mathbf{b}(u_k, v) - \langle G, v\rangle \end{aligned} \tag{84}$$

Yhtälön (84) viimeisellä rivillä oleva muoto vastaa omassa PDE-asettelussamme ($\mathbf{b} \to \mathbf{a}$, $G \to \hat{F}$ ja $\mathcal{H} \to V_0$) reuna-arvo ongelmaa (kirjoita tähän mikä demojen ongelma!), jonka ratkaiseminen on (lähes) yhtä hankalaa kuin alkuperäisen ongelman (γ) ratkaiseminen. Tämä tarkoittaa käytännössä sitä, että kiintopisteiteraatio ei anna vielä tässä vaiheessa mitään käytännöllistä tapaa ratkaista reuna-arvo ongelmaa numeerisesti. Toisaalta, tässä muotoiltuja ideoita voidaan käyttää myöhemmin, kun konstruoidaan numeerista ratkaisua.

Nyt meillä on jo ratkaisun olemassaolo ja yksikäsitteisyys. Vielä puuttuvat lauseen 1.17 lopussa olevat arviot:

$$\|u\|_{\mathcal{H}} = \frac{\|u\|_{\mathcal{H}}^2}{\|u\|_{\mathcal{H}}} \overset{(*)}{\leq} \frac{1}{\mu_1}\frac{\mathbf{b}(u,u)}{\|u\|_{\mathcal{H}}} = \frac{1}{\mu_1}\frac{\langle G, u\rangle}{\|u\|_{\mathcal{H}}} \overset{(cs)}{\leq} \frac{1}{\mu_1}\frac{\|G\|_{\mathcal{H}^*}\|u\|_{\mathcal{H}}}{\|u\|_{\mathcal{H}}} = \frac{\|G\|_{\mathcal{H}^*}}{\mu_1} \tag{85}$$

Kohdassa $(*)$ käytettiin bilineaarimuodon elliptisyyttä $\mathbf{b}(u,u) \geq \mu_1 \|u\|_{\mathcal{H}}^2$. Toinen arvio saadaan seuraavasti:

$$\|u\|_{\mathcal{H}} = \sup_{\substack{v \in \mathcal{H} \\ v \neq 0}} \frac{\|u\|_{\mathcal{H}}\|v\|_{\mathcal{H}}}{\|v\|_{\mathcal{H}}} \overset{(\dagger)}{\geq} \frac{1}{\mu_2} \sup_{\substack{v \in \mathcal{H} \\ v \neq 0}} \frac{|\mathbf{b}(u,v)|}{\|v\|_{\mathcal{H}}} = \frac{1}{\mu_2} \sup_{\substack{v \in \mathcal{H} \\ v \neq 0}} \frac{|\langle G, v\rangle|}{\|v\|_{\mathcal{H}}} \overset{(\ddagger)}{=} \frac{\|G\|_{\mathcal{H}^*}}{\mu_2} \tag{86}$$

Kohdassa $(\dagger)$ käytettiin bilineaarimuodon rajoittuneisuutta $\mathbf{b}(u,v) \leq \mu_2 \|u\|_{\mathcal{H}}\|v\|_{\mathcal{H}}$ ja kohdassa $(\ddagger)$ operaattorin G duaalinormin määritelmää.

□

Huomautus 1.28 luennoissa numerointi kusee, siksi tämä ylimääräinen huomautus (vain siksi, että numerointi saadaan samaksi kuin mitä luennoissa: poistetaan sitten kuin kokonaisuus on valmis).

Katsotaan symmetristä ja ei-negatiivista tapausta (edelliseen liittyen?)

Lemma 1.29 *Olkoon bilineaarinen muoto $\mathbf{b}(\cdot,\cdot)$ symmetrinen ja ei-negatiivinen, ts. $\mathbf{b}(v,w) \geq 0$ kaikilla $v, w \in \mathcal{H}$. Tällöin probleema (44) on ekvivalentti seuraavan kanssa:*

etsi $u \in \mathcal{H}$ siten, että $\mathcal{J}_{\mathbf{b}}(u) = \min_{v\in\mathcal{H}} \mathcal{J}_{\mathbf{b}}(v),$ (87) missä $\mathcal{J}_{\mathbf{b}}$ on `Ritzin energiafunktionaali`: $\mathcal{J}_{\mathbf{b}}(v) := \frac{1}{2}\mathbf{b}(v,v) - \langle G, v\rangle$ (88)	(η)

Todistus samalla tavoin kuin lemmassa 1.24.

Lemma 1.30 *Olkoon $\mathbf{a}(\cdot,\cdot)$ symmetrinen ja ei-negatiivinen bilineaarinen muoto V:llä. Olkoon $V_0 \in V$, $V_g = V + g$, $g \in V$. Tällöin probleema (γ) on ekvivalentti seuraavan kanssa:*

etsi $u \in V_g$ siten, että $\mathcal{J}_{\mathbf{a}}(u) = \min_{v\in V_g} \mathcal{J}_{\mathbf{a}}(v),$ (89) missä $\mathcal{J}_{\mathbf{a}}(v) := \frac{1}{2}\mathbf{a}(v,v) - \langle F, v\rangle$ (90)	(ϑ)

Todistus menee samaan tapaan kuin lemmassa 1.24 (ks. laskuharjoitukset, tehtävä $\boxed{13}$).

Huomautus 1.31 Lemman 1.30 todistus selventää testifunktioiden roolia ja sallittu- ja etsintäsuuntia.

Lemma 1.32 *Olkoon Lax-Milgramin teoreeman 1.17 oletukset voimassa ja lisäksi $\mathbf{b}(\cdot,\cdot)$ symmetrinen bilineaarinen muoto. Tällöin saadaan seuraava arvio kontraktiolle $\mathrm{M}_\tau = \mathbb{I} - \tau\,\mathcal{R}\,\mathcal{B}$:*

$$\|\mathrm{M}_\tau\| \leq q(\tau) = \max\{|1-\mu_1\tau|, |1-\mu_2\tau|\} \tag{91}$$

Lisäksi $q(\tau) < 1 \Leftrightarrow\ 0 \leq \tau \leq {}^2/_{\mu_2}$, $\min_\tau q(\tau) = q(\tau_{\mathrm{opt}})$ *ja*

$$\tau_{\mathrm{opt}} = \frac{2}{\mu_1+\mu_2}, \qquad q(\tau_{\mathrm{opt}}) = \frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_2+\mu_1} = \frac{\frac{\mu_2}{\mu_1}-1}{\frac{\mu_2}{\mu_1}+1} \tag{92}$$

Todistus. Osoitetaan, että operaattori $\mathrm{M}_\tau \in \mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})$ on itseadjungoitu. Olkoon $w, v \in \mathcal{H}$ mielivaltaisia. Tällöin

$$\begin{aligned}(w, \mathrm{M}_\tau v)_{\mathcal{H}} &= (w, v - \tau\,\mathcal{R}\,\mathcal{B}\,v)_{\mathcal{H}}\\ &= (w,v)_{\mathcal{H}} - \tau\,\underbrace{(w, \mathcal{R}\,\mathcal{B}\,v)_{\mathcal{H}}}_{\substack{=\mathbf{b}(v,w)\\ =\mathbf{b}(w,v)}}\\ &= (w,v)_{\mathcal{H}} - \tau(\mathcal{R}\,\mathcal{B}\,w, v)_{\mathcal{H}}\\ &= (\mathrm{M}_\tau w, v)_{\mathcal{H}}\end{aligned} \tag{93}$$

Yhtälön (93) yksityiskohdat seuraavat suoraan Riesz:n operaattorin $\mathcal{R}$ (ks. määritelmä 1.26) sekä operaattorin $\mathcal{B}$ (ks. 74) määritelmistä.

Voidaan osoittaa, että itseadjungoidulle Hilbertin avaruuden operaattorille M on voimassa

$$\|M\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})} = \sup_{\substack{v\in\mathcal{H}\\ v\neq 0}} \frac{|(Mv,v)_{\mathcal{H}}|}{(v,v)_{\mathcal{H}}} \tag{94}$$

Kun $\tau > 0$, bilineaarimuodon rajoittuneisuudesta $\mathbf{b}(w,w) \le \mu_2\|w\|^2$ $\forall w \in \mathcal{H}$ ja elliptisyydestä $\mathbf{b}(w,w) \ge \mu_1\|w\|^2$ $\forall w \in \mathcal{H}$ seuraa operaattorin M_τ määritelmän kanssa yhdessä

$$(1-\tau\mu_2)\|w\|^2_{\mathcal{H}} \overset{(ra)}{\le} \underbrace{(\mathrm{M}_\tau w, w)_{\mathcal{H}}}_{=(w,w)_{\mathcal{H}}-\tau\mathbf{b}(w,w)} \overset{(el)}{\le} (1-\tau\mu_1)\|w\|^2_{\mathcal{H}}, \tag{95}$$

josta seuraa suoraan väite (91). Loppujen yksityiskohtien todistus seuraa yksinkertaisella algebralla ja mallia voi katsoa Lax-Milgramin teoreeman todistuksen ζ vastaavasta kohdasta.

□

1.4 Galerkin-FEM

`Galerkinin periaate` tarkoittaa, että rajoitetaan analyysi *äärellisulotteisiin aliavaruuksiin / lineaarisiin alueisiin* $V_h \subset V$, $V_{0h} \subset V_0 \cap V_h$ ja $V_{gh} \subset V_g \cap V_h$. Variaatio-ongelma ($\gamma$) `diskretisoidaan` ja muotoillaan `diskreetti variaatio-ongelma` ("projektio" avaruuksille V_{gh} ja V_{0h}) seuraavasti:

> Etsi approksimatiivinen ratkaisu $u_h \in V_{gh}$, jolle $\forall v_h \in V_{0h}$ on voimassa
>
> $$\mathbf{a}(u_h, v_h) = \langle F, v_h\rangle, \tag{96}$$

(ι)

Yleensä on $V_{0h} = V_0 \cap V_h$ ja $V_{gh} = V_g \cap V_h$, mutta tämä riippuu V:n määrittelystä. Oletetaan jatkossa, että $V_{gh} = g_h + V_h$ jollekin $g_h \in V_h$.

Galerkin-Ritz, symmetrinen tapaus

Jos $\mathbf{a}(\cdot,\cdot)$ on symmetrinen ja ei-negatiivinen bilineaarinen muoto, niin lemman 1.29 nojalla ongelma (ι) on ekvivalentti seuraavan minimointiongelman kanssa:

$$\mathcal{J}_{\mathbf{a}}(u_h) = \min_{v\in V_{gh}} \mathcal{J}(v), \tag{97}$$

missä $\mathcal{J}_{\mathbf{a}}$ on `Ritzin energiafunktionaali`.

Äärelliset elementit (FEM)

Tarkastellaan erikoistapausta V_h:ssa. Perusideana on, että funktiot V_h:sta ovat paloittain sileitä ja kantafunktioilla on *pieni tuki* (ks. määritelmä 1.3).

Välijako ja siihen liittyvä FE-avaruus

Olkoot `noodit` (pisteet) $\{x_i\}_{i=1}^{n_h}$, $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{h_h}$ ja `elementit` $\mathrm{T}_k := (x_{k-1}, x_k)$, $\mathrm{T}_1 \to \mathrm{T}_n$.

Määritelmä 1.33 `Välijako` (eng. *mesh*) $\tau_h := \{\mathrm{T}_1, \ldots, \mathrm{T}_{n_h}\}$ on *jako* välille $[0, 1]$. Jakoparametrin leveys on $h := \max_{k=1,\ldots,n_h} h_k$, $h_k = x_k - x_{k-1}$ eli elementin T_k pituus.

Määritellään lisäksi avaruus

$$V_h := \left\{ v \in \mathcal{C}[0,1] \mid v\Big|_{\mathrm{T}} \in \mathcal{P}_1 \ \forall \mathrm{T} \in \tau_h \right\} \tag{98}$$

Nyt $\dim V_h = n_h + 1$ ja V_h on jatkuvien paloittain lineaaristen funktioiden avaruus.

On selvää, että $V_h \in \mathrm{H}^1(0,1)$. Lisäksi havaitaan, että V_h:n funktiot ovat yksikäsitteisesti määriteltyjä välijaon τ_h arvojen perusteella.

Jatkossa rajoitutaan tapaukseen

$$V_0 = \left\{ v \in \mathrm{H}^1(0,1) \mid v(0) = 0 \right\}. \tag{99}$$

Asetetaan lisäksi

$$V_{0h} := V_0 \cap V_h = \{v_h \in V_h \mid v_h(0) = 0\}, \tag{100}$$

ja

$$V_{gh} := V_g \cap V_h = \{v_h \in V_h \mid v_h(0) = g\}, \tag{101}$$

jolloin $\dim(V_{0h}) = n_h$ ja edelleen $V_{gh} = g_0 + V_{0h}$.

Noodikanta ja vektori- matriisimuotoilu

Määritellään avaruudelle V_h kantafunktiot ϕ_i, $i = 1, \ldots, n_h$ siten, että kaikille $j = 1, \ldots, n_h$ pätee

$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{102}$$

Näistä funktioista käytetään myös nimitystä `hattufunktiot`; nimen idea on seurausta oheisesta kuvasta (KUVA PUUTTUU). Huomaa, että määritelmänsä perusteella (ja KUVASTA havainnollistaen) jokaisella ϕ_i on pieni lokaali tuki:

$$\phi_i(x) = 0 \text{ kaikille } x \in [0,1] \setminus (x_{i-1}, x_{i+1}). \tag{103}$$

Avaruuden V_h määritelmästä (98) nähdään suoraan, että $\phi_i(x_j)$:t todella muodostavat kannan V_h:ssa eli $V_h = \operatorname{span}\{\phi_i\}_{i=0}^{n_h}$. Täten mielivaltainen $v_h \in V_h$ pisteessä $x \in [0,1]$ voidaan kirjoittaa lineaarikombinaationa

$$v_h(x) = \sum_{i=0}^{n_h} v_i \phi_i(x), \tag{104}$$

missä $v_i := v_h(x_i) \in \mathbb{R}$ on funktiota noodissa i vastaava vakiokerroin. Koska $V_{0h} \subset V_h$, niin yhtälön(104) muoto pätee myös kaikille $v \in V_{0h}$ sekä $V_{0h} = \operatorname{span}\{\phi_i\}_{i=0}^{n_h}$. Avaruudelle V_{gh} kirjoitetaan

$$V_{gh} = \left\{ v_h \in V_h \mid v_h = g_0\phi_0 + \sum_{i=0}^{n_h} v_i\phi_i \right\} = \underbrace{g_0\phi_0}_{=g_h \in V_g} + V_{0h}. \tag{105}$$

Variaatio-ongelman (ι) ratkaisulle $u_h \in V_{gh}$ on näin ollen $u_h = g_0\phi_0 + \sum_{i=0}^{n_h} u_i\phi_i$, missä siis g_0 tunnetaan ja u_j:t ovat tuntemattomia (*vapausasteet*).

Kannan $\{\phi_i\}$ avulla voidaan johtaa yhteys diskreetin variaatio-ongelman (ι) ja *lineaarialgebran* välille. Yhtälön (96) ja kantafunktioiden määrittelyn perusteella pätee mielivaltaiselle $v_h \in V_{0h}$ jokaiselle kompontentille $i = 1, \ldots, n_h$ erikseen (lineaarisuuden nojalla kertoimet v_i supistuvat puolittain pois)

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}(u_h, \phi_i) &= \langle F, \phi_i \rangle \\
\mathbf{a}\left(g_h + \sum_{j=0}^{n_h} u_j\phi_j, \phi_i \right) &= \langle F, \phi_i \rangle \\
\mathbf{a}(g_h, \phi_i) + \sum_{j=0}^{n_h} u_j \mathbf{a}(\phi_j, \phi_i) &= \langle F, \phi_i \rangle \\
\sum_{j=0}^{n_h} \underbrace{\mathbf{a}(\phi_j, \phi_i)}_{=:\mathrm{K}_{ij}} u_j &= \underbrace{\langle F, \phi_i \rangle - g_0 \mathbf{a}(\phi_0, \phi_i)}_{=:f_i} \\
\sum_{j=0}^{n_h} \mathrm{K}_{ij}\, u_j &= f_i.
\end{aligned} \tag{106}$$

Huomaa, että indeksit vaihtuvat toisinpäin K_{ij}:n määrittelyssä, kuin mitä ne olivat bilineaarimuodossa $\mathbf{a}(\phi_j, \phi_i)$. Tämä seuraa matriisitulon määrittelystä, ks. laskuharjoitustehtävä $\boxed{16}$.

Yhtälön (106) viimeisellä rivillä on `elementin jäykkyysmatriisi` $\mathrm{K}_h := \{\mathrm{K}_{ij}\}_{i,j=1}^{n_h}$ ja vektorin $\underline{u}_h$ i:nnen rivin yhtälö lineaarisessa systeemissä, jonka oikealla puolella on vektori $\underline{f}_h$:

$$\mathrm{K}_h\, \underline{u}_h = \underline{f}_h, \quad \text{missä} \quad \underline{u}_h = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{n_h} \end{bmatrix}, \quad \underline{f}_h = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_{n_h} \end{bmatrix}. \tag{107}$$

Huomaa, että edellä $u_i = u_h(x_i)$ jokaiselle $i = 1, \ldots, n_h$.

Lineaarisen systeemin ratkaiseminen

Seuraava tavoitteemme on ratkaista edellä esitetty lineaarinen systeemi tietokoneella. Katsotaan ensin kuitenkin muutamia oleellisia määrittelyseikkoja.

Huomautus. Elementin jäykkyysmatriisin $\mathrm{K}_h \in \mathrm{M}_{n_h \times n_h}$ elementtien indeksointi on joissakin kirjallisissa esityksissä valittu alkamaan nollasta, jolloin saadaan $\mathbb{R}^{n_h+1} \times \mathbb{R}^{n_h+1}$-matriisi.

Funktioiden $v_h \in V_{0h}$ ja vektoreiden $\underline{v}_h \in \mathbb{R}^{n_h}$ välillä on seuraava yhteys:

$$v_h \in V_h \;\leftrightarrow\; \underline{v}_h \in \mathbb{R}^{n_h}, \quad \underline{v}_h^T = \begin{bmatrix} v_1 \cdots v_i \cdots v_{n_h} \end{bmatrix}, \quad v_i = v_h(x_i) \tag{108}$$

Relaatiota (108) kutsutaan **Ritzin isomorfismiksi**. Se *ei ole* isometria[6], joten normit saattavat erota toisistaan, ts. $\|v_h\|_{\mathrm{H}^1} \neq \|\underline{v}_h\|_{l^2}$ ja $\|v_h\|_{\mathrm{L}^2} \neq \|\underline{v}_h\|_{l^2}$, missä $\|\cdot\|_{l^2}$ on tavallinen **Euklidinen normi**. Sisätulo kuitenkin säilyy: laskuharjoituksissa (th. 16) osoitetaan, että kaikille $\underline{v}_h, \underline{w}_h \in \mathbb{R}^{n_h}$ ja vastaaville $v_h, w_h \in V_{0h}$ pätee

$$\mathbf{a}(v_h, w_h) = (\mathrm{K}_h\, \underline{v}_h, \underline{w}_h)_{l^2} \tag{109}$$

$$\langle \hat{F}, v_h \rangle = \langle F, v_h \rangle - \mathbf{a}(g_h, v_h) = (\underline{f}_h, \underline{v}_h)_{l^2} \tag{110}$$

Yleisesti ajatellen on voimassa seuraavat yhteydet tässä yhteydessä tarkasteltavien funktioavaruuksien ja vektoriavaruuksien välillä.

$$\begin{aligned} \text{bilin. muoto} \in V_{0h} \times V_{0h} \quad &\leftrightarrow \quad \text{matriisi} \in \mathrm{M}(\mathbb{R}^{n_h} \times \mathbb{R}^{n_h}) \\ \text{lin. funktionaali} \in V_{0h}^* \quad &\leftrightarrow \quad \text{vektori} \in \mathbb{R}^{n_h} \\ \text{funktio} \in V_{0h} \quad &\leftrightarrow \quad \text{vektori} \in \mathbb{R}^{n_h} \end{aligned}$$

Elementin jäykkyysmatriisi malliongelmalle

Rajoitutaan tarkastelemaan esimerkin 1.14 malliprobleemaa. Matriisielementille K_{ij} saadaan

$$\mathrm{K}_{ij} = \mathbf{a}(\phi_j, \phi_i) = \int_0^1 \phi_j' \phi_i' \,\mathrm{d}x \tag{111}$$

Kantafunktioiden määrittelyn perusteella $\phi_j'\phi_i'$ ja koko integraali yhtälössä (111) on nollaa, kun $|i-j| > 1$ (ka. KUVA luennot VI s. 3 jossa kantafunktiot, PIIRRÄ; toisaalta tämä seuraa suoraan myös lokaalin tuen määritelmästä). Tämä ehto on yhtäpitävää sen kanssa, että elementin jäykkyysmatriisi K_h on **tridiagonaalinen**, ts. $\mathrm{K}_{ij} = 0$ kaikille i, j joille $|i-j| > 1$. Edelleen voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} (\mathrm{K}_h\, \underline{v}_h, \underline{w}_h)_{l^2} = \mathbf{a}(v_h, w_h) &= \sum_{\mathrm{T} \in \tau_h} \int_{\mathrm{T}} v_h' w_h' \,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=1}^{n_h} \sum_{i,j=1}^{n_h} \underbrace{\int_{\mathrm{T}_k} \phi_j' \phi_i' \,\mathrm{d}x}_{=:(*)} \, v_j w_i \end{aligned} \tag{112}$$

Kun $k = 1$, niin $(*) = 0$ jos $i > 1$ tai $j > 1$ (PIIRRÄ KUVA 1. ELEMENTISTÄ, siitä sen näkee parhaiten). Kun $k > 1$, niin $(*) = 0$ jos $i \notin \{k-1, k\}$ tai $j \notin \{k-1, k\}$ (tämän näkee myös KUVASTA suoraan). Näin ollen yhtälöstä (112) saadaan edelleen muoto

$$(\mathrm{K}_h\, \underline{v}_h, \underline{w}_h)_{l^2} = \mathrm{K}_h^{(1)} v_1 w_1 + \sum_{k=2}^{n_h} \left(\mathrm{K}_h^{(k)} \begin{bmatrix} v_{k-1} \\ v_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{k-1} \\ w_k \end{bmatrix} \right), \tag{113}$$

missä $\mathrm{K}_h^{(1)} = \int_{\mathrm{T}_1} (\phi_i')^2 \,\mathrm{d}x$ ja kun $k > 1$, saamme

$$\mathrm{K}_h^{(k)} = \begin{bmatrix} \int_{\mathrm{T}_k} (\phi_{k-1}')^2 \,\mathrm{d}x & \int_{\mathrm{T}_k} \phi_{k-1}' \phi_k' \,\mathrm{d}x \\ \int_{\mathrm{T}_k} \phi_k' \phi_{k-1}' \,\mathrm{d}x & \int_{\mathrm{T}_k} (\phi_k')^2 \,\mathrm{d}x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{K}_{00}^{(k)} & \mathrm{K}_{01}^{(k)} \\ \mathrm{K}_{10}^{(k)} & \mathrm{K}_{11}^{(k)} \end{bmatrix}, \tag{114}$$

[6] Määritelmässä 1.26 esitelty *Riesz:n isomorfismi* $\mathcal{R}$ oli myös isometria, ts. $\|\mathcal{R}\,\mathcal{B}\,v\|_{\mathcal{H}} = \|\mathcal{B}\,v\|_{\mathcal{H}}$.

missä $\mathrm{K}_h^{(k)}$ on k. `elementin jäykkyysmatriisi` ja $\phi|_{\mathrm{T}_k}$:t ovat `muotofunktioita`. Kun $k = 1$, saadaan $\mathrm{K}_h^{(1)} = \mathrm{K}_{11}^{(k)}$. Tämän voi ajatella geometrisesti esim. niin, että ensimmäisen elementin tapauksess ainoastaan oikeassa alakulmassa oleva elementti kontribuoi, sillä muut ovat matriisin ulkopuolella (!). Kun $k > 1$, niin matriiseja asetellaan osittain päällekkäin diagonaalille, (piirrä KUVA tai matriisi, joka selventää asiaa)

Referenssielementtien käyttö Laskut elementin jäykkyysmatriisille hoidetaan referenssikoordinaatistossa. Määritellään kuvaus

$$F_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \xi \mapsto x_{k-1} + \xi(x_k - x_{k-1}), \quad \xi \in [0, 1] \tag{115}$$

`Referenssielementtiä` merkitään $\hat{\mathrm{T}}$, ja $\xi \in \hat{\mathrm{T}}$, ts. referenssialue on suljettu väli $[0, 1]$. Nyt $F_k(\hat{\mathrm{T}}) = \mathrm{T}_k$, $F_k(0) = x_{k-1}$, $F_k(1) = x_k$ ja $F_k'(\xi) = x_k - x_{k-1} = h_k$ eli tarkasteluvälin (elementin) pituus. Lisäksi

$$\phi_{k-1}(F_k(\xi)) = \hat{\phi}_0(\xi) = 1 - \xi \ \Rightarrow \hat{\phi}_0'(\xi) = -1 \tag{116}$$

$$\phi_k(F_k(\xi)) = \hat{\phi}_1(\xi) = \xi \ \Rightarrow \hat{\phi}_1'(\xi) = 1, \tag{117}$$

missä $\hat{\phi}_0$ ja $\hat{\phi}_1$ ovat referenssielementillä määritellyt kantafunktiot (ks. KUVA piirrä tämän jälkeen)

Referenssielementillä määriteltyjen kantafunktioiden ja elementillä k määriteltyjen kantafunktioiden derivaatoille pätee

$$\hat{\phi}_0'(\xi) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\{\phi_{k-1}[F_k(\xi)]\} \overset{(*)}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{\phi_{k-1}[F_k(\xi)]\}\frac{\mathrm{d}F_k(\xi)}{\mathrm{d}\xi} = \phi_{k-1}'F_k' \tag{118}$$

$$\hat{\phi}_1'(\xi) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\{\phi_k[F_k(\xi)]\} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{\phi_k[F_k(\xi)]\}\frac{\mathrm{d}F_k(\xi)}{\mathrm{d}\xi} = \phi_k'F_k' \tag{119}$$

Yllä kohdassa $(*)$ on käytetty derivoinnin ketjusääntöä. Derivaatan notaatiossa käytetty pilkku viittaa funktiolle ϕ derivaattaan muuttujan x suhteen ja funktiolle F_k derivaattaan ξ:n suhteen.

Kun $k = 1$, saadaan yhtälön (118) avulla

$$\begin{aligned}\mathrm{K}_h^{(1)} = \int_{\mathrm{T}_1} \phi_1'(x)^2 \ \mathrm{d}x &= \int_{\hat{\mathrm{T}}} \phi_1'[F_1(\xi)]^2 |F_1'(\xi)| \ \mathrm{d}\xi \\ &\overset{(\dagger)}{=} \int_{\hat{\mathrm{T}}} \frac{\hat{\phi}_1'(\xi)^2}{F_1'(\xi)^2}|F_1'(\xi)| \ \mathrm{d}\xi \\ &= \frac{1}{h_1}\int_{\hat{\mathrm{T}}} \underbrace{\hat{\phi}_1'(\xi)^2}_{=1} = \frac{1}{h_1}\end{aligned} \tag{120}$$

Huomaa edellä, että $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\xi = F_k'(\xi)$, kohdassa $(\dagger)$ vaihdetaan referenssielementillä määritellyn kantafunktion derivaatan $\hat{\phi}'$ integrointiin ja $F_k'(\xi) = h_k$ eli elementin pituus. Kun $k > 1$, saadaan edellisen kanssa analogisella laskulla yhtälöitä (116) käyttämällä

$$\mathrm{K}_h^{(k)} = \frac{1}{h_k}\left[\int_{\hat{\mathrm{T}}} \hat{\phi}_l'(\xi)\hat{\phi}_m'(\xi)\right]_{l,m=0}^{1} = \frac{1}{h_k}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{h_k}\begin{bmatrix} \mathrm{K}_{00} & \mathrm{K}_{01} \\ \mathrm{K}_{10} & \mathrm{K}_{11} \end{bmatrix} \tag{121}$$

Näistä elementtimatriiseista kootaan kaikkien elementti $\mathbb{R}^{n_h} \times \mathbb{R}^{n_h}$ -ulotteinen jäykkyysmatriisi. Jos kyseessä on `tasavälinen jako` (eng. *nonequidistant mesh*) eli $h_k = h$

on vakio kaikille $k = 1, \ldots, n_h$, niin jäykkyysmatriisi on muotoa

$$
\mathrm{K}_h = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{122}
$$

Sovelluksissa jäykkyysmatriisi tavallisesti kootaan yksittäisten elementtien matriiseista loopissa yli kaikkien elementtien (ks. ohjelmointiharjoitukset)

Painovektori Painovektorin i:nnelle komponentille saadaan yhtälön (106) perusteella

$$
\begin{aligned}
f_i = \langle \hat{F}, \phi_i \rangle &= \langle F, \phi_i \rangle - \mathbf{a}(g_0\phi_0, \phi_i) \\
&= \int_0^1 f\phi_i \, \mathrm{d}x + g_1 v(1) - \mathbf{a}(g_0\phi_0, \phi_i) \\
&= \sum_{\mathrm{T}\in\tau_h} \int_{\mathrm{T}} f\phi_i \, \mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{123}
$$

Muistetaan, että kantafunktioilla on pieni tuki, ts. $\mathrm{supp}(\phi_i) = \overline{\mathrm{T}_{i-1} \cup \mathrm{T}_i}$. Ensimmäiselle elementille ($k = 1$) saadaan

$$
\int_{\mathrm{T}_1} f\phi_i \, \mathrm{d}x = \begin{cases} h_1 \int_{\hat{\mathrm{T}}} f[F_1(\xi)]\hat{\phi}_1(\xi) \, \mathrm{d}\xi, & \text{jos } i = 1 \\ 0, & \text{muuten} \end{cases} \tag{124}
$$

Kun $k > 1$, niin vastaavasti

$$
\int_{\mathrm{T}_k} f\phi_i \, \mathrm{d}x = \begin{cases} h_k \int_{\hat{\mathrm{T}}} f[F_k(\xi)]\hat{\phi}_0(\xi) \, \mathrm{d}\xi, & \text{jos } i = k-1 \\ h_k \int_{\hat{\mathrm{T}}} f[F_k(\xi)]\hat{\phi}_1(\xi) \, \mathrm{d}\xi, & \text{jos } i = k \end{cases} \tag{125}
$$

Tavallisesti integraaleja ei lasketa tarkasti, vaan *approksimoidaan* sopivalla tavalla. Oletetaan tässä yksinkertaistuksen vuoksi, että $f \in \mathcal{C}[0,1]$ ja arvioidaan integraalia ns. `puolisuunnikassäännöllä`, jonka mukaan

$$
\int_0^1 g(\xi) \, \mathrm{d}\xi \approx \frac{1}{2}\left[g(0) + g(1)\right] \tag{126}
$$

Nyt funktiolle f saadaan, kun $k = 1$,

$$
h_1 \int_{\hat{\mathrm{T}}} f[F_1(\xi)]\hat{\phi}_1(\xi) \, \mathrm{d}\xi \approx \frac{h_1}{2}\left[f(x_0\hat{\phi}_1(0) + f(x_1)\hat{\phi}_1(1))\right] = \frac{h_1}{2} f(x_1) := f_1^{(1)}, \tag{127}
$$

ja analogisesti kun $k > 1$

$$
\begin{aligned}
h_k \int_{\hat{\mathrm{T}}} f[F_k(\xi)]\hat{\phi}_0(\xi) \, \mathrm{d}\xi &\approx \frac{h_k}{2} f(x_{k-1}) := f_0^{(k)} \\
h_k \int_{\hat{\mathrm{T}}} f[F_k(\xi)]\hat{\phi}_1(\xi) \, \mathrm{d}\xi, &\approx \frac{h_k}{2} f(x_k) := f_1^{(k)}
\end{aligned} \tag{128}
$$

Näistä tuloksista voidaan koota approksimatiivinen painovektori, joka saa muodon

$$
\underline{f}_h \approx \begin{bmatrix} f_1^{(1)} + f_0^{(2)} \\ f_1^{(2)} + f_0^{(3)} \\ \vdots \\ f_1^{(n_h-1)} + f_0^{(n_h)} \\ f_1^{(n_h)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underbrace{g_1\phi_1(1)}_{=0} - \underbrace{\mathbf{a}(\phi_0, \phi_1)}_{=1/h_1} \\ \vdots \\ g_1\phi_{n_h}(1) - \mathbf{a}(\phi_0, \phi_{n_h}) \end{bmatrix} \tag{129}
$$

Kantafunktioiden määritelmän (103) sekä yhtälön (111) perusteella on $\mathbf{a}(\phi_0\phi_j) = 0\ \forall j \geq 2$ ja $\phi_j(1) = 0\ \forall j < n_h$, joten yhtälö (129) muuntuu muotoon

$$\underline{f}_h \approx \begin{bmatrix} f_1^{(1)} + f_0^{(2)} + g_0/h_1 \\ f_1^{(2)} + f_0^{(3)} \\ \vdots \\ f_1^{(n_h-1)} + f_0^{(n_h)} \\ f_1^{(n_h)} + g_1 \end{bmatrix} \tag{130}$$

Erikoistapauksessa $h_k = h$ on vakio kaikille $k = 1\ldots, n_h$ saadaan

$$\underline{f}_h^T \approx h\left[f(x_1)g_0/h^2, \quad f(x_2), \quad \cdots \quad , \quad f(x_{n_h-1}), \quad f(x_{n_h})/2 + g_1/h\right] \tag{131}$$

Ekvivalenssi FDM:n kanssa Tarkastellaan yhtälöä (107) tasaväliselle jaolle. Komponenteittain yhtälö on (matriisia (122) kertomalla), käyttäen hyväksi edellä johdettua yhtälöä (131),

$$\begin{cases} \frac{1}{h}\left[2u_1 - u_2\right] = hf(x_1) + \frac{g_0}{h} & , \text{ kun } i = 1 \\ \frac{1}{h}\left[-u_{i-1} + 2u_i + u_{i+1}\right] & , \text{ kun } 1 < i < n_h \\ \frac{1}{h}\left[-u_{n_h-1} + u_{n_h}\right] & , \text{ kun } i = n_h \end{cases} \tag{132}$$

Yhtälö (132) on ekvivalentti seuraavan kanssa:

$$\begin{cases} -\frac{1}{h^2}\left[g_0 - 2u_1 + u_2\right] = f(x_1) & , \ i = 1 \\ -\frac{1}{h^2}\left[u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}\right] = f(x_i) & , \ 1 < i < n_h \\ -\frac{2}{h}\left[g_1 - \frac{u_{n_h} - u_{n_h-1}}{2}\right] = f(x_{n_h}) & , \ i = n_h \end{cases} \tag{133}$$

Vrt. ylläolevaa malliongelman klassiseen differentiaaliyhtälöön (6), joka oli muotoa $-u''(x) = f(x)$. Termi $^{u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}}/_{h^2}$ on toinen keskeisdifferenssiapproksimaatio toiselle derivaatalle $u''(x_i)$. Viimeisellä (ja ensimmäisellä?) rivillä käytetään yksipuolisia differenssiapproksimaatioita (difference quotients?). Huom. FDM ei toimi kunnolla korkeissa dimensoissa

Huomioita

(1) R. Courant havaitsi vuonna 1943, että FDM voidaan uudelleenkirjoittaa Ritzin metodina käyttäen paloittain lineaarisia funktioita.

(2) FDM:n konstruointi yleisille 2D / 3D välijaoille on melko monimutkaista, ts. FEM:llä on paljon etuja korkeissa dimensioissa

(3) Kuvaus referenssielementeille vaikuttaa ei-tarpeelliselta 1D:ssä, mutta on hyvin oleellinen 2D:ssä / 3D:ssä.

1.5 Ratkaisu FEM-systeemille yhdessä ulottuvuudessa

Tarkastellaan systeemiä $\mathrm{K}_h\,\underline{u}_h = \underline{f}_h$. Koska K_h on tridiagonaalinen, voidaan se ratkaista nopeutetulla Gaussin eliminointimenetelmällä (ns. `Thomasin algoritmi`) lineaarisesssa ajassa $\mathcal{O}(n)$ sekä operaatoiden että muistinkäytön suhteen eli on optimaalinen.

Varoitus. 2D:ssä / 3D:ssä matriisit *eivät* ole tridiagonaalisia ja optimaalisen ratkaisun löytäminen on hankalaa.

1.6 Diskretisointivirhe

Nyt on selvitetty malliongelman (1.14) äärellisulotteiselle muotoilulle ratkaisu $u_h \in V_{gh}$, joka vastaa tehtävää (ι). Kysymys kuuluu, kuinka suuren virheen u_h tekee suhteessa tarkkaan ratkaisuun $u \in V_g$, ts. arvioidaan `diskretisointivirhettä`

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq \, ? \tag{134}$$

On oletettavaa, että hieno välijako (pieni h) antaa myös pienen virheen. Homogenisoidaan tarkasteltava yhtälö seuraavasti:

$$V_{gh} = g_h + V_{0h} \quad \leftrightarrow u_h = g_h + u_{0h}, \; u_{0h} \in V_{0h} \tag{135}$$

$$V_g = g_h + V_0 \quad \leftrightarrow u = g_h + u_0, \; u_0 \in V_0 \tag{136}$$

Tällöin on voimassa yhtälöt

$$\mathbf{a}(u_0, v) = \langle F, v\rangle - \mathbf{a}(g_h, v) = \langle \hat{F}, v\rangle \quad \forall v \in V_0 \tag{137}$$

$$\mathbf{a}(u_{0h}, v) = \langle F, v_h\rangle - \mathbf{a}(g_h, v_h) = \langle \hat{F}, v_h\rangle \quad \forall v_h \in V_{0h} \tag{138}$$

Lisäksi pätee $u - u_h = u_0 - u_{0h}$.

Cea'n lemma – approksimointivirhe

Lemma 1.34 (Cea) *Olkoon Lax-Milgramin teoreeman 1.17 oletukset voimassa. Oletetaan lisäksi, että $\mathcal{H}_h \subset \mathcal{H}$, $\dim(\mathcal{H}_h) < \infty$ ja*

$$u \in \mathcal{H} \textit{ siten, että } \mathbf{b}(u, v) = \langle G, v\rangle \;\forall v \in \mathcal{H} \tag{139}$$

$$u_h \in \mathcal{H}_h \textit{ siten, että } \mathbf{b}(u_h, v_h) = \langle G, v_h\rangle \;\forall v_h \in \mathcal{H}_h \tag{140}$$

Tällöin

$$\|u - u_h\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{\mu_2}{\mu_1} \inf_{w_h \in \mathcal{H}_h} \|u - w_h\|_{\mathcal{H}}, \tag{141}$$

missä μ_1 ja μ_2 ovat bilineaarimuodon $\mathbf{b}(\cdot,\cdot)$ elliptisyys- ja rajoittuneisuusvakiot.

Todistus. Havainnollistetaan ensin ominaisuus, josta käytetään nimeä `Galerkinin ortogonaalisuus`. Cea'n lemman oletuksista bilineaarimuodolle $\mathbf{b}$ saadaan valinnalla $v = v_h \in \mathcal{H}_h$

$$\begin{cases} \mathbf{b}(u, v_h) & = \langle G, v_h\rangle \\ \mathbf{b}(u_h, v_h) & = \langle G, v_h\rangle \end{cases} \Rightarrow \mathbf{b}(u - u_h, v_h) = 0 \quad \text{kaikille } v_h \in \mathcal{H}_h, \tag{142}$$

jolloin merkitään $u - u_h \perp_{\mathbf{b}} v_h$: huomaa, että $\mathbf{b}(\cdot,\cdot)$ ei välttämättä ole sisätulo. Nyt saadaan Cea'n lemman arvio

$$\begin{aligned} \mu_1 \|u - u_h\|^2_{\mathcal{H}} &\leq \mathbf{b}(u - u_h, u - u_h) \\ &\overset{(*)}{=} \mathbf{b}(u - u_h, u - w_h) + \mathbf{b}(u - u_h, \overbrace{w_h - u_h}^{\in \mathcal{H}_h}) \\ &\leq \mu_2 \|u - u_h\|_{\mathcal{H}} \|u - w_h\|_{\mathcal{H}} \end{aligned} \tag{143}$$

Kohdassa $(*)$ lisättiin sisätuloon nolla muodossa $-w_h + w_h, w_h \in \mathcal{H}_h$ ja epäyhtälöarvioinnit seuraavat suoraan bilineaarimuodon elliptisyydestä sekä rajoittuneisuudesta. Nyt $u - u_h \neq 0$, joten tällä voidaan jakaa yhtälö (143) puolittain, jolloin jokaiselle $w_h \in \mathcal{H}_h$ on voimassa

$$\mu_1 \|u - u_h\|_{\mathcal{H}} \leq \mu_2 \|u - w_h\|_{\mathcal{H}} \tag{144}$$

Väite seuraa tästä suoraan, sillä w_h oli mielivaltainen ja täten yhtälö on voimassa myös infimumille.

□

Huomautus. Yhtälöiden (38) ja (96) kontekstissa edellä esitettyä infimum-termiä kutsutaan `approksimaatiovirheeksi`. Yleisesti ottaen funktion $w_h \in \mathcal{H}_h$ laskeminen on hankalaa, kun infimum saavutetaan. Cea'n lemma antaa keinon diskretisointivirheen arviointiin käyttäen approksimaatiovirhettä, joka on suurempi tekijällä μ_2/μ_1 kerrottuna (tässä määrittely on järkevää, sillä $\mu_2 \geq \mu_1$).

Interpolaatiovirhe

Rajoitutaan seuraavassa PDE-kontekstiin ja otetaan tavoitteeksi diskretisointivirheen arviointi ylhäältä, ts.

$$\|u - u_h\|_{\mathrm{H}^1} \leq C_h h^{\alpha}, \tag{145}$$

missä C_h on elementin pituudesta riippuva vakio ja α jokin positiivinen kokonaisluku. Käytetään apuna Cea'n lemmaa ja johdetaan raja approksimaatiovirheelle.

Määritellään paloittain lineaarinen `interpolaatio-operaattori` I,

$$\mathrm{I} : V \to V_h,\ v \mapsto v_h,\ v_h(x_i) = v(x_i)\ \forall i = 0, \cdots, n_h, \tag{146}$$

eli operaattorilla kuvattu funktio v antaa tuloksena aina funktion arvon kussakin noodissa ja nämä toisiinsa yhdistämällä saadaan lineaarinen interpolantti (jatkuva paloittain lineaarinen funktio) v_h funktiolle v. Operaattori I on hyvin määritelty, sillä $\mathrm{H}^1(0,1) \subset \mathcal{C}[0,1]$, kiitos jälkioperaattorin (ks. lemma[7] 1.10), jota voidaan soveltaa mihin tahansa pisteeseen $x \in [0,1]$ (ks. seuraus 1.12). Varoituksen sanana kuitenkin sellainen, että 2D:ssä / 3D:ssä interpolaation I ei olisi analogisesti esitettynä hyvin määritelty koko H^1:ssä.

Nyt Cea'n lemman yhtälössä (141) voidaan normi $\|u - w_h\|_{\mathrm{H}^1}$ kirjoittaa operaattorin I avulla muodossa $\|u - \mathrm{I}\,u\|_{\mathrm{H}^1}$, missä $\mathrm{I}\,u \in V_h$. Lokalisoidaan seuraavassa approksimaatiovirhe yksittäisille elementeille ja kuvataan edelleen referenssielementeille. Olkoon $v \in \mathcal{C}^2[0,1]$ (syy tähän selviää pitkän kaavanjohdon jälkeen!):

$$\begin{aligned}
\|v - \mathrm{I}\,v\|_{\mathrm{L}^2} &= \int_0^1 |v(x) - (\mathrm{I}\,v)(x)|^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=1}^{n_h} \int_{\mathrm{T}_k} |v(x) - (\mathrm{I}\,v)(x)|^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=1}^{n_h} \int_{\hat{\mathrm{T}}} |v[F_k(\xi)] - (\mathrm{I}\,v)[F_k(\xi)]|^2 \underbrace{|F_k'(\xi)|}_{=h_k} \,\mathrm{d}\xi
\end{aligned} \tag{147}$$

[7] Huomaa, että lemman todistus oli muotoiltu siten, että sama konstruktio voidaan tehdä mille tahansa $x \in [0,1]$, vaikka jäljen määritelmässä käytettiin vain arvoa $x = 0$.

Määritellään operaattori

$$\hat{\mathrm{I}} : \mathrm{H}^1(\hat{\mathrm{T}}) \to \mathcal{P}_1(\hat{\mathrm{T}}),\ \hat{v} \mapsto \hat{\mathrm{I}}\,\hat{v}, \tag{148}$$

jolle $(\hat{\mathrm{I}}\,\hat{v})(0) = \hat{v}(0)$, $(\hat{\mathrm{I}}\,\hat{v})(1) = \hat{v}(1)$ ja

$$(\hat{\mathrm{I}}\,(\hat{v}))(\xi) = \hat{v}(0)\phi_0(\xi) + \hat{v}_1\phi_1(\xi) = \hat{v}(0)(1-\xi) + \hat{v}_1\xi \tag{149}$$

Nyt saadaan yhtälön (147) viimeisellä rivillä esiintyvälle termille arvio

$$\begin{aligned}(\mathrm{I}\,v)[F_k(\xi)] &= v(x_{k-1})[\phi_{k-1}(F_k(\xi))] + v(x_k)\underbrace{\phi_k[F_k(\xi)]}_{=\hat{\phi}_1} \\ &= (\hat{\mathrm{I}}\,v)[F_k(\xi)]\end{aligned} \tag{150}$$

Kiinnitetään $k \in \{1,\ldots,n_h\}$ ja asetetaan $\hat{v} = v \circ F_k$, jolloin yhtälön (147) viimeisen rivin integraalin sisältöä voidaan arvioida:

$$\begin{aligned}v[F_k(\xi)] - (\mathrm{I}\,v)[F_k(\xi)] &= \hat{v}(\xi) - (\hat{\mathrm{I}}\,\hat{v})(\xi) \\ &= \hat{v}(\xi) - \hat{v}(0)(1-\xi) - \hat{v}(1)\xi \\ &= [\hat{v}(\xi) - \hat{v}(0)] - \xi\,[\hat{v}(1) - \hat{v}(0)]\end{aligned} \tag{151}$$

Koska alussa oletettiin $v \in \mathcal{C}^2[0,1]$, niin analyysin perusteoriasta löytyy tulos jonka avulla voidaan edellisen yhtälön viimeinen rivi kirjoittaa integraaleilla. Kun lisäksi määritellään muuttuja

$$\begin{aligned}[\hat{v}(\xi) - \hat{v}(0)] - \xi\,[\hat{v}(1) - \hat{v}(0)] &= \int_0^1 \hat{v}'(z)\ \mathrm{d}z - \xi\int_0^1 \hat{v}'(y)\ \mathrm{d}y \\ &\overset{(*)}{=} \xi\int_0^1 \hat{v}(\xi y) - \hat{v}(y)\ \mathrm{d}y \\ &\overset{(\dagger)}{=} \xi\int_0^1\int_y^{\xi y} \hat{v}''(z)\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}y\end{aligned} \tag{152}$$

Kohdassa $(*)$ määriteltiin muuttuja $z := \xi y$, jolle $\mathrm{d}z = \xi\ \mathrm{d}y$ ja kohdassa $(\dagger)$ otettiin jälleen analyysin perusteoreema (keksi tälle se nimi kuten edelläkin!) avuksi. Kokonaisuudessaan edellinen säätäminen antaa arvion

$$\begin{aligned}|\hat{v}(\xi) - (\hat{\mathrm{I}}\,\hat{v})(\xi)| &\le \underbrace{\xi}_{\le 1}\int_0^1\int_{\xi y}^{y} |\hat{v}''(z)|\ \mathrm{d}z\ \mathrm{d}y \\ &\overset{(cs)}{\le} 1\cdot 1\cdot\sqrt{1}\underbrace{\sqrt{\int_0^1 |\hat{v}''(z)|^2\ \mathrm{d}z}}_{=\|v''\|_{\mathrm{L}^2(\hat{\mathrm{T}})}}\end{aligned} \tag{153}$$

Kokoamalla edelliset tulokset yhteen saadaan arvio

$$h_k\int_{\hat{\mathrm{T}}} |\hat{v}(\xi) - (\hat{\mathrm{I}}\,\hat{v})(\xi)|^2\ \mathrm{d}\xi \le h_k\int_{\hat{\mathrm{T}}} |\hat{v}''(\xi)|^2\ \mathrm{d}\xi \tag{154}$$

Seuraavaksi tarvitaan muunnosta takaisinpäin eli referenssielementiltä $\hat{\mathrm{T}}$ yleiselle elementille T_k. Derivoinnin ketjusääntö antaa

$$\hat{v}'(\xi) = v'[F_k(\xi)]F_k'(\xi) = h_k v'[F_k(\xi)] \tag{155}$$

$$\hat{v}''(\xi) = h_k v''[F_k(\xi)]F_k'(\xi) = h_k^2 v''[F_k(\xi)] \tag{156}$$

Sijoitetaan yhtälön (154) viimeiselle riville ja saadaan

$$\begin{aligned} h_k \int_{\hat{\mathrm{T}}} |\hat{v}''(\xi)|^2 \,\mathrm{d}\xi &= h_k \int_{\mathrm{T}_k} \underbrace{|\hat{v}''[F_k^{-1}(x)]|^2}_{=h_k^2 v''(x)} \underbrace{|F_k^{-1}(x)|}_{=1/h_k} \,\mathrm{d}x \\ &= h_k \frac{h_k^4}{h_k} \int_{\mathrm{T}_k} |v''(x)|^2 \,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{157}$$

Edellisessä yhtälössä käänteiskuvauksen olemassaolo funktiolle F_k on selvää, sillä F_k:n määritelmän (115) nojalla kuvaus vie välin $\hat{\mathrm{T}}$ väliksi T_k ja järkevästi määritellylle välille $x_k > x_{k-1}$. Lisäksi F_k on aidosti kasvava, kun se ajatellaan muuttujan x_k funktiona ja x_{k-1} on kiinnitetty, ts. kyseessä on aidosti kasvava bijektio.

Kirjoitetaan koko edellinen todistusketju nyt yhdeksi yhtälöksi:

$$\begin{aligned} \int_0^1 |v(x) - (\mathrm{I}\, v)(x)|^2 \,\mathrm{d}x &= \sum_{k=1}^{n_h} h_k \int_{\hat{\mathrm{T}}} |v[F_k(\xi)] - (\mathrm{I}\, v)[F_k[\xi]]|^2 \,\mathrm{d}\xi \\ &\leq \sum_{k=1}^{n_h} h_k^4 \int_{\mathrm{T}_k} |v''(x)|^2 \,\mathrm{d}x \\ &\leq h^4 \int_0^1 |v''(x)|^2 \,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{158}$$

Viimeisessä epäyhtälössä oletettiin $h_k \leq h$. Lisäksi tämä koko roska osoittaa interpolaatiovirheen rajoittuneisuuden ainoastaan funktioille $v \in \mathcal{C}^2[0,1]$. Seuraavaksi määritellään uusi Sobolevin avaruus $\mathrm{H}^2(0,1)$ (merkitään jatkossa vain H^2 kun määrittelyväli on asiayhteydestä selvä) ja yleistetään tulos kaikille tämän avaruuden funktioille.

Määritelmä (Sobolev-avaruus H2) Sobolev-avaruus $\mathrm{H}^2(0,1)$ on joukko

$$\mathrm{H}^2(0,1) := \left\{ v \in \mathrm{L}^2 \mid v' \in \mathrm{L}^2(0,1),\ v'' \in \mathrm{L}^2(0,1) \right\} \tag{159}$$

Määritelmässä esiintyvät derivaatat ovat *heikkoja derivaattoja* (ks. määritelmä 1.4). Avaruudelle $\mathrm{H}^2(0,1)$ määritellään normi

$$\|v\|_{\mathrm{H}^2(0,1)} := \left(\|v\|_{\mathrm{L}^2}^2 + \|v'\|_{\mathrm{L}^2}^2 + \|v''\|_{\mathrm{L}^2}^2 \right)^{1/2} \tag{160}$$

Nyt yhtälön (158) vasen ja oikea puoli ovat jatkuvia normin $\|\cdot\|_{\mathrm{H}^2(0,1)}$ suhteen, joten sulkeumaperiaatteen nojalla yhtälö (158) pätee kaikilla $v \in \mathrm{H}^2$ (tässä esimerkkinä se, että edellisellä merkinnällä tarkoitetaan avaruutta $\mathrm{H}^2(0,1)$.)

Notaatio Käytetään avaruudesta $\mathrm{H}^2(0,1)$ merkintää H^2 silloin, kun tarkasteluväli on asiayhteydestä selvä. Vastaavasti merkitään normille $\|\|_{\mathrm{H}^2(0,1)} =: \|\|_{\mathrm{H}^2}$.

Lemma 1.35 *On olemassa vakiot $C_0, C_1 > 0$ siten, että kaikilla $v \in \mathrm{H}^2(0,1)$ on voimassa*

(i) $\|v - \mathrm{I}\, v\|_{\mathrm{L}^2} \leq C_0 h^2 \|v''\|_{\mathrm{L}^2}$
(ii) $|v - \mathrm{I}\, v|_{\mathrm{H}^1} \leq C_1 h \|v''\|_{\mathrm{L}^2}$

Todistus. Ensimmäinen kohta seuraa huhujen mukaan yhtälöstä (158) ja jälkimmäinen on laskuharjoituksissa 5 tehtävänä.

□

Konvergenssi H^1-normin suhteen

Lause 1.36 *Olkoon $u \in \mathrm{H}^2$ yhtälön (γ) täsmällinen ratkaisu ja olkoon u_h Galerkinin FEM-ongelman ratkaisu (ks. (ι). Olkoot lisäksi Lax-Milgramin teoreeman 1.17 oletukset voimassa. Tällöin on olemassa vakio $C_2 > 0$ (joka ei riipu h:sta) siten, että*

$$\|u - u_h\|_{\mathrm{H}^1} \leq C_2 \cdot h \cdot \|u''\|_{\mathrm{L}^2} = \mathcal{O}(h) \tag{161}$$

Todistus. Céa:n lemmasta saadaan arvio

$$\begin{aligned} \|u''\|_{\mathrm{H}^1} \overset{(*)}{=} \|u_0 - u_{0h}\|_{\mathrm{H}^1} &\overset{(cea)}{\leq} \frac{\mu_2}{\mu_1} \inf_{w_h \in V_{0h}} \|u_0 - u_{0h}\|_{\mathrm{H}^1} \\ &\leq \frac{\mu_2}{\mu_1} \|\underbrace{u_0 - \mathrm{I}\, u_0}_{=u - \mathrm{I}\, u}\|_{\mathrm{H}^1} \\ &= \frac{\mu_2}{\mu_1} \left(\|u - \mathrm{I}\, u\|^2_{\mathrm{L}^2} + |u - \mathrm{I}\, u|^2_{\mathrm{H}^1} \right)^{1/2} \end{aligned} \tag{162}$$

Kohdassa ($*$) on käytetty relaatioita $u = g_h + u_0$ ja $u_h = g_h + u_{0h}$. Kun edelleen sovelletaan yhtälön alimpaan riviin lemmaa 1.35, niin saadaan

$$\begin{aligned} \frac{\mu_2}{\mu_1} \left(\|u - \mathrm{I}\, u\|^2_{\mathrm{L}^2} + |u - \mathrm{I}\, u|^2_{\mathrm{H}^1} \right)^{1/2} &= \frac{\mu_2}{\mu_1} \left(C_0 h^4 \|u''\|^2_{\mathrm{L}^2} + C_1 h^2 \|u''\|^2_{\mathrm{L}^2} \right)^{1/2} \\ &\overset{h \leq 1}{\leq} \frac{\mu_2}{\mu_1} \sqrt{C_0^2 + C_1^2}\, h \|u''\|_{\mathrm{L}^2}. \end{aligned} \tag{163}$$

Tulkinta: kun lisäoletus $u \in \mathrm{H}^2$ on voimassa, niin $u_h \to u$ $\|\cdot\|_{\mathrm{H}^1}$:ssa kun $h \to 0$. Tämä tarkoittaa, että sarjalle välijakoja, missä maksimaalinen välin koko lähestyy nollaa, on $u_h \to u$. Tämä on luontevaa käytännön kannalta, sillä mitä pienempi väli, sitä parempi ratkaisu pitäisi ongelmalle saada.

□

Huomautus 1.37 Tästä jatkuu…

2 Aputuloksia

2.1 Avaruuksia

Määritelmä 2.1 (Lebesquen avaruuksia) Oletetaan mitallinen avaruus Ω ja mitallinen funktio f. Olkoon L^1 kaikkien integroituvien funktioiden $f : \Omega \to \mathbb{R}$ joukko. Nyt jokaiselle $1 < p < \infty$ määritellään avaruus

$$\mathrm{L}^p = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \mid |f|^p \in \mathrm{L}^1 \right\} \tag{164}$$

sekä avaruutta vastaava normi

$$\|f\|_{\mathrm{L}^p} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p \right]^{\frac{1}{p}} \tag{165}$$

Erityisesti kun $p = 2$ saadaan neliöintegroituvien funktioiden avaruus. Kun $p = \infty$, määritellään

$$\mathrm{L}^\infty = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \mid \exists C \in \mathbb{R} \text{ s.e. } |f(x)| \leq C \ \forall x \in \Omega \} \tag{166}$$

jolloin vastaava normi on

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf \{C \mid |f(x)| \leq C \ \forall x \in \Omega\} \tag{167}$$

Edellisestä normista käytetään joskus myös termiä ess sup $f(x)$ eli `oleellinen supremum` (*essential supremum*), joka tarkoittaa pienintä lukua $\alpha \in \mathbb{R}$ siten, että joukko $\{x \mid f(x) > \alpha\}$ on nollamittainen. Esimerkiksi funktiolle $f : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1/x$ on ess sup $f(x) = \infty$, kun taas samassa joukossa määritellylle funktiolle $g(x) = 3x$ pätee ess sup $g(x) = 3$, ts. funktion maksimiarvo määrittelyjoukossa.

Määritelmä 2.2 (lokaalisti integroituva funktio) Funktio f on lokaalisti integroituva, mikäli se on integroituva jokaisessa määrittelyjoukkonsa kompaktissa osajoukossa. Tarkemmin: jos $f : \Omega \to \mathbb{R}$ on Lebesgue-mitallinen funktio joukossa Ω ja jos

$$\int_{K} |f| \ \mathrm{d}\mu < +\infty \tag{168}$$

jokaisella kompaktilla osajoukolla $K \subset \Omega$, niin f on `lokaalisti integroituva`. Näiden funktioiden joukkoa merkitään

$$L^1_{\mathrm{loc}} := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \ \text{ mitallinen} \mid f \in L^1(K) \ \forall \ K \subset \Omega,\ \text{K kompakti} \right\} \tag{169}$$

Huomautus 2.3 Lokaalisti integroituvat funktiot ovat siinä mielessä merkittäviä, että ne voivat esimerkiksi avoimen määrittelyalueen ”reunoilla” kasvaa mielivaltaisen nopeasti kohti ääretöntä, mutta

Määritelmä 2.4 (Reaalinen Hilbertin avaruus) Reaalinen Hilbertin avaruus $\mathcal{H}$ on lineaarinen täydellinen sisätuloavaruus, ts. jokainen cauchy-jono suppenee $\mathcal{H}$:ssa. Sisätulo $(\cdot,\cdot)_{\mathcal{H}}$ on funktio $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$.

Tässä monisteessa tarkastellaan (toistaiseksi) vain Hilbertin avaruuksia, joissa kerroinkuntana on reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ (vrt. kvanttimekaniikassa kompleksiluvut, kuten myös yleisessä tapauksessa).

Määritelmä 2.5 (Cauchy-jono) Tämä on määritelty luennolla 4, tosin tänne voisi kirjoittaa hieman tarkemman määritelmän.

2.2 Yhtälöitä ja epäyhtälöitä

Kootaan yhteen sekalaisia funktionaalianalyysin yms. aputuloksia, joita käytetään kurssilla ilman sen suurempaa mainintaa. Jossakin vaiheessa nämä mahdollisesti liitetään yhteen varsinaisen luentojen teoriaosan kanssa.

Lause 2.6 (Cauchy-Schwarzin-Bunjakowskin (CS) epäyhtälö) *Joillakin oletuksilla avaruudessa* $L^2(0,1)$ *on voimassa*

$$\left| \int_0^1 uv \ \mathrm{d}x \right| \leq \int_0^1 |uv| \ \mathrm{d}x \leq \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2}, \tag{170}$$

missä jälkimmäinen epäyhtälö on juurikin CS. Ensimmäinen seuraa perusanalyysistä ks. tarkasteluvälillä. Esimerkiksi Friedmanin kirjassa [2] on s. 202 todistettu kompleksiselle Hilbertin avaruudelle.

2.3 Määritelmiä

Määritelmä 2.7 (tiheä joukko) Joukko A on *tiheä* joukossa B, jos kaikille $x \in B$ on olemassa $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ siten, että $x_k \in A$ kun $\lim_{k\to\infty} x_k = x$.

Esimerkiksi $\mathcal{C}[0,1]$ on tiheä avaruudessa (joukossa) $\mathrm{H}^1(0,1)$.

Määritelmä 2.8 (sulkeumaperiaate) ??

3 Matematiikkasanastoa Suomi - Saksa

Hieman sanastoa liittyen matemaattisiin käsitteisiin saksaksi.

4 Laskuharjoitustehtävät

Tänne ladotaan englannin kielellä laskuharjoitustehtävät lähinnä viittaamista varten liittyen teoriaosaan. Mallivastauksia ei esitetä muuten kuin että joitakin todistuksia voi olla ladottuna teorian sekaan.

4.1 Tutorial 1

4.2 Tutorial 2

4.3 Tutorial 3

4.4 Tutorial 4

4.5 Tutorial 5

References

[1] Haim Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, first edition, 2011. doi:10.1007/978-0-387-70914-7.

[2] Friedman, A. *Foundations of Modern Analysis*. Dover, Second edition, 1982.

[3] Walter Zulehner. *Numerische Mathematik - Eine Einführung anhand von Differentialgleichungsproblemen. Band 1: Stationäre Probleme*. Birkhäuser Verlag AG, first edition, 2008. doi:10.1007/978-3-7643-8427-2.

[4] Walter Zulehner. *Numerische Mathematik - Eine Einführung anhand von Differentialgleichungsproblemen. Band 2: Instationäre Probleme*. Birkhäuser Verlag AG, first edition, 2008. doi:10.1007/978-3-7643-8429-6.