

Lyhyt matematiikka

MB01 KURSSIKOE

Lue nämä ohjeet ennen kuin vastaat tehtäviin

- Vastaukset kirjoitetaan erilliselle konseptipaperille, johon laitetaan kahden ruudun marginaali ja tehtävänumerot marginaaliin. Tehtävät erotetaan toisistaan vaakasuuntaisella viivalla. Konseptin yläosaan kirjoitetaan oma etu- ja sukunimi sekä opetusryhmä ja jätetään tyhjä tila arvosanalle.
- Tehtäviä on kuusi (6) ja ne on jaettu kahteen osaan:
 - *Laskumekaniikka* käsittelee perusasioita
 - *Sovellukset* hieman haastavampia ongelmia.

Kokeessa vastataan kaikkiin tehtäviin. Tehtävien maksimipistemäärä on kuusi (6) pistettä tehtävää kohden.

- TÄMÄ PAPERI PALAUTETAAN VASTAUSPAPERIN VÄLISSÄ ILMAN MERKINTÖJÄ

Tehtävät ovat seuraavalla sivulla.

Lyhyt matematiikka

MB02 KURSSIKOE

Lue nämä ohjeet ennen kuin vastaat tehtäviin

- Vastaukset kirjoitetaan erilliselle konseptipaperille, johon laitetaan kahden ruudun marginaali ja tehtävänumerot marginaaliin. Tehtävät erotetaan toisistaan vaakasuuntaisella viivalla. Konseptin yläosaan kirjoitetaan *oma etu- ja sukunimi sekä opetusryhmä ja jätetään tyhjä tila arvosanalle.*
- Tehtäviä on seitsemän (7) ja ne on jaettu kahteen osaan: *laskumekaniikka* käsittelee peruslaskutoimituksia ja yhtälöiden ratkaisua ja *geometria* varsinaista kurssisisältöä. Kokeessa vastataan korkeintaan viiteen (5) tehtävään. Jokaisen tehtävän maksimipistemäärä on kuusi (6) pistettä.
- TÄMÄ PAPERI PALAUTETAAN VASTAUSPAPERIN VÄLISSÄ ILMAN MERKINTÖJÄ

Tehtävät ovat seuraavalla sivulla.

Laskumekaniikka

- 1 a) Kuinka monta ratkaisua on yhtälöllä $\frac{x}{3} - 2x = x^2$?
- b) Olkoot a , b ja c reaalilukuja, joille pätee $a + b = 2c$ ja $a - b = 2c$. Määritä reaaliluku a .
- c) Pituus ja paino ovat suoraan verrannollisia. Jos henkilö painaa 50 kg, hänen pituutensa on 160 cm. Kuinka painava on 175 cm pitkä henkilö?
- 2 a) Luonnollisen luvun ja sen neliön summa on 42. Mikä luku on kyseessä?
- b) Koiran ulkoiluttamiseen kävellään lenkki, jonka pituus luonnossa on 1,5 km. Kartan mittakaava on 1 : 15000. Kuinka pitkä matka on kartalla mitattuna?
- c) Oletetaan, että edellisen kohdan lenkki on suurin piirtein ympyrän muotoinen. Kuinka suuri on ympyrän pinta-ala?

Geometria

- 3 a) Oikokulma on jaettu kolmeen osaan siten, että toinen osa on kaksi kertaa ensimmäisen suuruinen ja kolmas osa on 25 % toisesta osasta. Laske oikokulman osien suuruudet asteen tarkkuudella.
- b) Tasakylkisen kolmion korkeus on puolet sen kannasta. Laske korkeus ja huippukulman suuruus, kun kolmion sivujan pituus on 3 yksikköä. Ilmoita korkeus tarkkana arvona ja huippukulma yhden desimaalin tarkkuudella.
- 4 a) Neljäkkään sivun pituus on 1 m. Kuinka pitkiä ovat neljäkkään lävistäjät, jos pidemmän lävistäjän ja neljäkkään kannan välinen kulma on 45 astetta? Anna vastaukset tarkkoina arvoina.
- b) Ympyräsegmenttiä vastaava keskuskulma on 62° . Ympyrän säde on 22 cm. Laske, kuinka suuri on segmenttiä vastaavan kolmion pinta-ala. Ilmoita vastaus sopivalla tarkkuudella.
- 5 Ympyräkartion korkeus on 10 cm, sivujan ja kannan välinen kulma on 60 astetta. Kartio leikataan vaakatasossa siten, että leikkauskohdan yläpuolelle jäävä tilavuus on $\frac{1}{3}$ koko kartion tilavuudesta. Määritä leikkauskohdan etäisyys kartion huipusta.
- 6 Golfpallon massa on 43,2 g ja halkaisija 42 mm. Määritä pallon tiheys ja pinta-ala.
- 7 Suorakulmaisen särmiön muotoisen juomalasin korkeus on 15 cm ja leveys 8 cm. Määritä lasin syvyys (kolmas ulottuvuus), kun lasin tilavuus on 970 cm^3 . Kuinka kaukana lasin yläreunasta on juoma, jonka tilavuus lasissa on 600 cm^3 ?

Laskumekaniikka

1 Sievennä annettu lauseke.

a)

$$\frac{6^2}{3 \cdot 4} + \frac{2 \cdot (1 - 4) - (2 - 9)}{6}$$

b)

$$\frac{(5 + 2) \cdot (5 - 2 + 4)}{3^2 - 4}$$

c)

$$\frac{2}{7} - \frac{3}{4} + 3 \cdot \frac{2}{9}$$

2 Sievennä annettu lauseke.

a)

$$\frac{\sqrt{5}\sqrt{45}}{3} - \sqrt{25}$$

b)

$$\frac{4^2 \cdot 3^2}{6} - \frac{\frac{2}{5^2}}{\frac{3+2^3}{11^2}}$$

3 Ratkaise yhtälöt.

a)

$$\frac{x^2 - 2x}{3x} + \frac{\sqrt{8}}{3} = 7x - \frac{4}{3}$$

b)

$$\frac{x^2 - 4}{x + 2} - 2x = 3 - x$$

Sovelluksia

4 Kotitalous kuluttaa sähköä vuodessa 5600 kWh (kilowattituntia). Kulutuksesta kodinkoneet vievät 68 % ja saunan lämmityksen osuus pienenee 2 %. Kuinka paljon sähkölasku vuositasolla muuttuu, jos sähkön hinta on 7 senttiä kilowattituntia kohden?

5 Virvoitusjuomapullon hinta paikallisessa marketissa on 2,20 €. Huonon muunnin vuosi hintaa pudotetaan 10 %, jolloin myynti kasvaa 4 %. Kuinka paljon

a) euromääräinen kokonaistuotto kuukaudessa muuttuu, jos pulloja myytiin alun perin 200 kpl kuukaudessa?

b) myynnin pitäisi vielä kasvaa, jotta tuotto ylittäisi 500 € kuukaudessa? Käytä apunasi a) kohdassa laskemaasi pullomäärää.

6 Selvitä algebrallisesti, missä pisteessä suora $y = 3x - \frac{1}{4}$ leikkaa x -akselin. Piirrä tilanteesta kuva.

Lyhyt matematiikka

MB02 UUSINTAKOE

Lue nämä ohjeet ennen kuin vastaat tehtäviin

- Vastaukset kirjoitetaan erilliselle konseptipaperille, johon laitetaan kahden ruudun marginaali ja tehtävänumerot marginaaliin. Tehtävät erotetaan toisistaan vaakasuuntaisella viivalla. Konseptin yläosaan kirjoitetaan *oma etu- ja sukunimi sekä opetusryhmä ja jätetään tyhjä tila arvosanalle*.
- Tehtäviä on seitsemän (7) ja ne on jaettu kahteen osaan: *laskumekaniikka* käsittelee peruslaskutoimituksia ja yhtälöiden ratkaisua ja *geometria* varsinaista kurssisisältöä. Kokeessa vastataan korkeintaan viiteen (5) tehtävään. Jokaisen tehtävän maksimipistemäärä on kuusi (6) pistettä.
- TÄMÄ PAPERI PALAUTETAAN VASTAUSPAPERIN VÄLISSÄ ILMAN MERKINTÖJÄ

Tehtävät ovat seuraavalla sivulla.

Laskumekaniikka

- 1 a) Ratkaise yhtälö $4x - \frac{x}{3} + 1 = \frac{3x}{4} - \frac{1}{5}$.
- b) Sievennä lauseke $\frac{\sqrt{[z^2+z-(-1+3z)]}}{z+1}$. Laske myös lausekkeen arvo, kun $z = 2$.
- c) Pitääkö seuraava väite paikkansa? Perustele.
"Reaaliluvun ja sen neliöjuuren erotus on aina suurempi kuin 0."
- 2 a) Keksi toisen asteen yhtälö, jonka kaksi ratkaisua ovat $x_1 = 3$ ja $x_2 = -1$. Perustele laskulla.
- b) Taulun leveys on 120 cm. Taulun ympärille laitetaan kehys, joka ulottuu 5 cm taulun reunojen ulkopuolelle pituus- ja leveyssuunnassa. Kehyksen ympäröimän taulun pinta-ala on $1,17 \text{ m}^2$. Kuinka korkea taulu on?

Geometria

- 3 a) Kolmion korkeus on 1 m. Kanta metreinä) saadaan yhtälön $\frac{x^2}{3} - 2x = 1$ ratkaisuna. Määritä kolmion pinta-ala.
- b) Säännöllisen nelikulmion lävistäjän pituus on $\sqrt{2}$. Määritä nelikulmion sivujen pituudet.
- 4 Pallopinnan ala on 12 m^2 . Pallon sisällä on toinen pallo, jonka tilavuus on 60 % suuremman pallon tilavuudesta. Kuinka monta prosenttia suuremman pallon pinta-ala on suurempi kuin pienemmän pallon pinta-ala? Anna vastaus prosenttiyksikön tarkkuudella.
- 5 Kalle katsoo pilvenpiirtäjän ikkunasta ulos ja huomaa henkilöauton 20° kulmassa vaakatasosta alaspäin. Pakettiauto liikkuu samassa suunnassa ja Kallen katsoessa sitä se näkyy 25° kulmassa vaakatasosta alaspäin. Kallen vaakasuora etäisyys pakettiautosta on 400 metriä. Kuinka pitkä on henkilöauton ja Kallen vaakasuoraan mitattu etäisyys? Kuinka korkealla Kalle on tienpinnasta mitattuna? Voidaan olettaa, että autot ovat samalla korkeudella niiden havaitsemishetkellä.
- 6 Standardikokoinen jääkiekko painaa 170 grammaa eli noin 6 unssia (ounce¹). Kiekko on ympyrälieriön muotoinen, sen halkaisija on 76 mm ja korkeus 25 mm. Määritä kiekon tilavuus. Kuinka monta unssia painaa voimaharjoituskiekko, jonka massa on 900 g eli noin 2 paunaa (pounds)?
- 7 Säännöllinen viisikulmio muodostuu viidestä samanlaisesta tasakylkisestä kolmiosta. Kolmion korkeus on 1. Määritä kuvion ala.

¹Raskaan sarjan nyrkkeilijät käyttävät 12 unssin hanskoja otteluissaan.

Lyhyt matematiikka

MB03 KURSSIKOE

Lue nämä ohjeet ennen kuin vastaat tehtäviin

- Vastaukset kirjoitetaan erilliselle konseptipaperille, johon laitetaan kahden ruudun marginaali ja tehtävänumerot marginaaliin. Tehtävät erotetaan toisistaan vaakasuuntaisella viivalla. Konseptin yläosaan kirjoitetaan oma etu- ja sukunimi sekä opetusryhmä ja jätetään tyhjä tila arvosanalle.
- Tehtäviä on kuusi (6) ja ne on jaettu kahteen osaan:
 - *Laskumekaniikka* käsittelee perusasioita
 - *Matemaattiset mallit* liittyy kurssin sovelluksiin.

Kokeessa vastataan kaikkiin tehtäviin. Tehtävien 1–5 maksimipistemäärä on kuusi (6) pistettä ja tehtävän 6 kolme (3) pistettä. Tehtävän 6 pisteet ovat ylimääräisiä lisäpisteitä.

- TÄMÄ PAPERI PALAUTETAAN VASTAUSPAPERIN VÄLISSÄ ILMAN MERKINTÖJÄ

Tehtävät ovat seuraavalla sivulla.

Laskumekaniikka

- 1 a) Automatkan pituus s on suoraan verrannollinen matkaan kuluneeseen aikaan t . Kuinka kauan kestää 100 km matka, jos 30 kilometrin matkaan kului aikaa puoli tuntia?
- b) Ratkaise yhtälö $\frac{1}{3}x - (4 - 2x) = 5$
- 2 a) Osoita, että toisen asteen yhtälöllä $2x^2 - 2x - 1 = 0$ on täsmälleen kaksi ratkaisua.
- b) Ratkaise yhtälö $3x^{\frac{1}{3}} = 2$
- c) Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} 3y - 2x = 5 \\ y - \frac{x}{2} = 3 \end{cases}$$

- 3 a) Hahmottele paloittain määritellyn funktion $h(z)$ kuvaaja, kun funktion lauseke on muotoa

$$h(z) = \begin{cases} -z^2 + 1 & , \quad z < -3 \\ 2(z + 1) & , \quad -3 \leq z \leq 2 \\ 2^z - 1 & , \quad 2 < z \leq 4 \end{cases}$$

Kuvaajalle kannattaa varata tilaa kokonainen sivu!

- b) Laske polynomin $\mathcal{P}(x) = 5x^2 - 2x + 3$ arvo, kun $x = -1/2$.

Matemaattiset mallit

- 4 a) Rahastosijoituksen vuotuinen tuotto on keskimäärin 6,8 %. Kuinka paljon sijoittaja laittoi rahaa likoon vuoden 2004 alussa, jos hänen tilillään vuoden 2010 lopussa oli yhteensä 73200 euroa rahaa?
- b) Äänen intensiteetti on kääntäen verrannollinen kuuntelijan ja äänilähteen välisen etäisyyden neliöön. Kuinka suuri on konserttilavan edessä (noin 10 metriä äänilähteestä) seisovien kuuntelijoiden kokema intensiteetti verrattuna kuulijoihin, jotka ovat istumapaikoilla noin 50 metrin etäisyydellä äänilähteestä?
- 5 Uuden puhelimen käyttökustannukset muodostuvat aloitusmaksusta sekä kuukausimaksusta. Taulukossa 1 on kolmen eri operaattorin tarjoamat paketit samalle puhelinmallille. Sopimuskauden pituus on 24 kuukautta.
- a) Muodosta lineaariset mallit puhelinpakettien kokonaiskustannuksille, jotka kuvaavat kustannuksien riippuvuutta ajasta. Ilmaise aika t kuukausina.
- b) Perustelee algebrallisesti, mikä vaihtoehto on kuluttajalle edullisin.

TAULUKKO 1: Operaattorit ja puhelimen käyttökustannukset

Operaattori	Aloitusmaksu (€)	Kuukausimaksu (€/kk)
A	64	9,90
B	19	11,90
C	0	12,80

- 6 Kirjoita rakentavaa, hyvin perusteltua kurssipalautetta noin puolen sivun verran. Voit saada korkeintaan kolme ylimääräistä pistettä.

Lyhyt matematiikka

MB03 LAAJEMPI KOTITEHTÄVÄ

Lue nämä ohjeet ennen kuin vastaat tehtäviin

- Vastaukset kirjoitetaan erilliselle konseptipaperille, johon laitetaan kahden ruudun marginaali ja tehtävänumerot marginaaliin. Tehtävät erotetaan toisistaan vaakasuuntaisella viivalla. Konseptin yläosaan kirjoitetaan oma etu- ja sukunimi sekä opetusryhmä ja jätetään tyhjä tila arvosanalle.
- Tehtäviä on kuusi (6) ja ne on jaettu kahteen osaan: *laskumekaniikka* käsittelee peruslaskutoimituksia ja yhtälöiden ratkaisua ja *Matemaattiset mallit* varsinaista kurssisisältöä. Kotitehtävässä vastataan korkeintaan viiteen (5) tehtävään. Jokaisen tehtävän maksimipistemäärä on kuusi (6) pistettä.
- TÄMÄ PAPERI PALAUTETAAN VASTAUSPAPERIN VÄLISSÄ ILMAN MERKINTÖJÄ

Tehtävät ovat seuraavalla sivulla.

Laskumekaniikka

- 1 a) Ratkaise ensimmäisen asteen yhtälö $\frac{2x}{6} + x = \frac{3}{5}x - 4$.
- b) Millä muuttujan x arvoilla yhtälö $(2x)^2 - x - 3 = 0$ on tosi?
- 2 a) Määritä suorien $y = \frac{3}{4}x - 2$ ja $3y + 4x - 1 = 0$ leikkauspiste algebrallisesti. Piirrä tilanteesta kuva.
- b) Ratkaise yhtälö $2x^{\frac{1}{7}} = \sqrt{3}$.

Matemaattiset mallit

- 3 a) Bussimatka Torontosta Niagaran putouksille kestää 1 h 35 min. Matkan pituus on 128 km. Kirjoita lauseke funktiolle $s(t)$, joka kuvaa bussin etäisyyttä Torontosta ajanhetkellä t . Oletetaan, että bussin nopeus on tasainen koko matkan ja aika ilmoitetaan yhtälössä tunteina.
- b) Ohjelmistokehittäjän kuukausitulot koostuvat peruspalkasta sekä tehokkuuslisästä. Peruspalkka on 1700 €/kk ja tehokkuuslisää maksetaan 1 sentti jokaista kirjoitettua koordinaattipistettä kohden. Kehittäjä tekee kahdeksan tunnin työpäivää viitenä päivänä viikossa ja yhden minuutin aikana hän kirjoittaa keskimäärin 5 riviä koodia. Kuinka suuri on kuukausipalkka? Laadi funktio, joka kuvaa palkan riippuvuutta kirjoitettujen rivien määrästä.
- 4 Pankkirosvot saavat hyvän saaliin ja päättävät sijoittaa rahansa joko pimeille markkinoille tai osakkeisiin nopean, mutta riskialttiin tuoton takaamiseksi. Sijoitus tehdään kolmen vuoden ajanjaksolle.
- Pimeillä markkinoilla "hämärämiehet" joutuvat maksamaan lainastaan korkoa 3 % vuodessa, mutta maksavat oikeasti 0,7 prosenttiyksikköä vähemmän korkoa (osa kuluu virkamiesten lahjomiseen yms.) vuosittain. Osakkeilla pääoman arvo kasvaa yhteensä 6,5 % alkuperäiseen verrattuna koko sijoitusjakson aikana. Kumpi sijoitus on rosvoille parempi, jos alkupääoman suuruus on \mathcal{P} ?
- 5 Suomen BKT asukasta kohden oli vuonna 2000 25524 euroa. Vuoden 2010 vastaava summa oli 33618 €(arvio). Oletetaan, että vuosittainen inflaatio aikavälillä oli keskimäärin 3,7 prosenttiyksikköä vuodessa.
- a) Kuinka suuri oli vuoden 2000 BKT vuoden 2010 hintatasolla mitattuna? Huomioi inflaation vaikutus. Mitä tuloksesta voidaan päätellä?
- b) Laske arvio vuoden 2020 BKT:lle vuoden 2010 perusteella olettaen, että vuotuinen BKT:n kasvu aikavälillä 2010–2020 on 4,2 prosenttiyksikköä. Muodosta myös BKT:ta kuvaava matemaattinen malli aikavälille 2000–2020 olettaen, että vuotuinen kasvuprosentti on vakio aikavälillä 2000–2010.
- 6 Ilotulitusraketin lentorata on hyvällä tarkkuudella paraabelin muotoinen. Raketti lähtee ilmaan ja putoaa maahan 20 metrin etäisyydelle lähtöpaikasta. Raketin huippukorkeus on 19 metriä.
- a) Määritä raketin lentorataa kuvaavan paraabelikäyrän yhtälö.
- b) Laske raketin korkeus, kun se on edennyt 7 m lähtöpaikastaan.

Lyhyt matematiikka

MB03 UUSINTAKOE

Lue nämä ohjeet ennen kuin vastaat tehtäviin

- Vastaukset kirjoitetaan erilliselle konseptipaperille, johon laitetaan kahden ruudun marginaali ja tehtävänumerot marginaaliin. Tehtävät erotetaan toisistaan vaakasuuntaisella viivalla. Konseptin yläosaan kirjoitetaan oma etu- ja sukunimi sekä opetusryhmä ja jätetään tyhjä tila arvosannalle.
- Tehtäviä on kuusi (6) ja ne on jaettu kahteen osaan:
 - *Laskumekaniikka* käsittelee perusasioita
 - *Matemaattiset mallit* liittyy kurssin sovelluksiin.

Kokeessa vastataan viiteen (5) tehtävään. Jokaisesta tehtävästä voi saada enintään kuusi (6) pistettä.

- TÄMÄ PAPERI PALAUTETAAN VASTAUSPAPERIN VÄLISSÄ ILMAN MERKINTÖJÄ

Tehtävät ovat seuraavalla sivulla.

Laskumekaniikka

- 1 a) Määritä yhtälön $x^{\frac{1}{3}} = 3$ ratkaisu.
 b) Ratkaise yhtälö $\frac{1}{6}x - (4 - 2x) = 5 + \frac{3x}{7}$
- 2 a) Toisen asteen yhtälön toinen ratkaisu on $x = 1$. Mikä on toinen ratkaisu, jos yhtälöä vastaavan paraabelin huippu on pisteessä $(0, -1)$?
 b) Ratkaise yhtälöpari

$$\begin{cases} -2y + 4x = 1 \\ y - \frac{x}{3} = -4 \end{cases}$$

- 3 a) Funktion $h(z)$ lauseke on muotoa

$$h(z) = \begin{cases} -\frac{1}{4}z^2 + 1 & , \quad z < -3 \\ 3^z - 1 & , \quad -3 \leq z \end{cases}$$

Hahmottele funktion kuvaaja välillä $[-4, 0]$.

- b) Määritä suoran $y = 2x + 1$ ja paraabelin $f(x) = x^2 - 1$ leikkauspisteet.

Matemaattiset mallit

- 4 Matti tallettaa pankkiin vuoden 2010 alussa 10 000 €. Vuotuinen pankin maksama korko talletukselle on 2,3 prosenttia. Inflaatio nostaa hintoja keskimäärin 2,5 % vuodessa.
- a) Kuinka suuren määrän rahaa Matti saa pankista ulos vuoden 2015 alussa?
 b) Kuinka suuri on Matin talletuksen ostovoima vuonna 2015 verrattuna vuoteen 2010? Huomioi inflaation vaikutus.
 c) Osakkeilla Matin säästöön laittama rahamäärä olisi kasvanut noin 6 % vuodessa. Kuinka paljon suurempi olisi Matin talletuksen ostovoima vuonna 2015, jos hän olisi sijoittanut rahansa pankin sijasta osakkeisiin?
- 5 Laiva laskee salaa Itämereen öljyä kolmen vuoden aikana yhteensä 50 tonnia. Kuinka suuren määrän öljyä laiva laskee mereen vuosittain, jos määrä puolittuu joka vuosi edellisen vuoden määrään verrattuna?
- 6 Timo päättää ostaa televisioonsa maksullisten kanavien viihdepaketin. Hänellä on valittavanaan kaksi vaihtoehtoa, jotka on esitetty taulukossa 1. Perustelee graafisesti, kumpi vaihtoehto on Timon kannalta parempi, jos molemmat tarjoavat saman kanavavalikoiman. Sopimuskauden pituus on 12 kuukautta.

TAULUKKO 1: Television viihdepakettien tarjoajat ja hinnat

Yritys	Aloituskassa (€)	Kuukausimaksu (€/kk)
A	249	24,90
B	199	29,90

MB04 Matemaattinen analyysi, kurssikoe

LUE OHJEET ENNEN KOKEESEEN VASTAAMISTA.

Ohjeet

- Kirjoita vastauspaperiin oma etu- ja sukunimesi.
- Laita marginaali, 3-5 ruutua sivun ulkoreunasta mitattuna.
- **Tehtäviä on kahdeksan (8), joista lasketaan maksimissaan VIISI (5) tehtävää oman valinnan mukaan.** Tehtävien maksimipistemäärä on kuusi (6) pistettä tehtävää kohden.
- Viimeinen tehtävä on jokeritehtävä, josta saa maksimissaan yhdeksän (9) pistettä.
- | |
|-----------------------------------------|
| Kokeen maksimipistemäärä on 30 pistettä |
|-----------------------------------------|
- Koe alkaa seuraavalta sivulta.

Kurssin MB04 laajempi kotitehtävä

Laajemman kotitehtävän tarkoituksena on mitata kurssilla tehtyä työtä mahdollisimman monipuolisesti. Kotitehtävä sisältää laskuja kurssin tähän mennessä käsitellyistä aiheista.

Tehtävien vastaukset kirjoitetaan puhtaaksi siistillä käsialalla konseptipaperille, jossa on kahden ruudun marginaali ja selvästi merkitty tehtävännumero marginaaliin. Lisäksi kirjoitetaan konseptiin oma nimi. Tehtävät ratkaistaan numerojärjestyksessä.

HUOM. *Tehtävä tehdään itsenäisesti.* Työ palautetaan kirjallisena opettajalle tai opettajanhuoneen laatikkoon 20.9.2010 mennessä.

1 Laskumekaniikka, max. 20 pistettä

1. Sievennä annettu lauseke.

(a)

$$\frac{6^2}{3 \cdot 4} + \frac{2(1-4) - (2-9)}{6}$$

(b)

$$\frac{(5+2)(5-2+4)}{3^2-4}$$

(c)

$$\frac{2}{7} - \frac{3}{4} + 3 \cdot \frac{2}{9}$$

(6p)

2. Sievennä annettu lauseke.

(a)

$$\frac{\sqrt{18} - 2\sqrt{8}}{3 + \sqrt{121}}$$

(b)

$$\frac{\sqrt{5}\sqrt{45}}{3} - \sqrt{25}$$

(c)

$$\frac{4^2 \cdot 3^2}{6} - \frac{\frac{2}{5^2}}{\frac{3+2^3}{11^2}}$$

(6p)

3. Ratkaise yhtälö.

(a)

$$\frac{x-2}{3} + \frac{1}{7} = 4x - 2$$

(b)

$$\frac{x^2 - 2x}{3x} + \frac{\sqrt{8}}{3} = 7x - \frac{4}{3}$$

(c)

$$(x+2)(x-3) = x^2 - 4x + 4$$

(d)

$$\frac{x^2 - 4}{x + 2} - 2x = 3 - x$$

(8p)

2 Analyysin perusteet, max. 20 pistettä

4. Määritä funktion $g(x) = \frac{1}{5}x^3 - 3x^2 + 2x - 15$ derivaatta. (2p)
5. Tutki, millä muuttujan x arvoilla polynomi $2x^2 - 5x - 3$ saa negatiivisia arvoja. (6p)
6. Tutki, milloin funktio $f(x) = x^3 - 27x + 2$ on kasvava ja milloin vähenevä. (6p)
7. Olkoon $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4$.
- (a) Missä kohdissa funktion kuvaaja on x -akselin suuntainen?
- (b) Millä välillä funktio on vähenevä? (6p)

3 Analyysin jatko-osa, max. 20 pistettä

8. Laske, missä kulmassa funktio $f(x) = x^3 - 4x^2$ leikkaa y -akselin. (6p)
9. Määritä funktion $h(x) = x(3 - 4x - x^2)$ suurin ja pienin arvo välillä $[-1, 3]$. (6p)
10. Määritä funktion $f(x) = -x^3 + 13,5x^2 - 41x + 50$ suurin arvo välillä $[0, 10]$. Mikä on vastaava muuttujan x arvo? Millä muuttujan x arvolla funktio kasvaa nopeimmin? Anna vastaukset kolmen desimaalin tarkkuudella. Piirrä funktion kuvaaja ko. välillä. (8p)

1 Laskumekaniikka

1. (a) Ratkaise yhtälö

$$\frac{2}{3}x - 2 = 4x - \frac{4}{7}$$

- (b) Laske $\mathcal{P}(1) - \mathcal{P}(-1)$, kun $\mathcal{P}(x) = x^3 - 5x + 2$.

- (c) Määritä funktion $f(x) = x^{201} - \frac{4}{18}x^{18} + x^4 - 1$ derivaattafunktio.

(6p)

2. (a) Kuinka monta ratkaisua on yhtälöllä $x^2 + 3x = \frac{1}{5}(3 + 15x) - 0,5$?

- (b) Määritä reaalityöt x ja y siten, että ehto

$$\frac{(x+y) \cdot (x-y)}{2} = \frac{11-x}{4}$$

toteutuu.

(6p)

2 Analyysin perusteet

3. Olkoon $g(x) = x^2 - 5x + 2$.

- (a) Määritä funktion $g(x)$ derivaatta ja sen arvo pisteessä $x = 1$.

- (b) Missä kohdissa funktion kuvaaja on x -akselin suuntainen?

- (c) Milloin funktio g saa negatiivisia arvoja?

(6p)

4. Määritä vakio k siten, että funktiolla $h(x) = x^2 - kx + 2k$ on täsmälleen yksi reaalityö-ratkaisu. Sijoita laskettu k :n arvo funktion $h(x)$ lausekkeeseen ja kerro, milloin funktio on kasvava.

(6p)

5. Eläinpopulaation suuruutta ajan t suhteen kahdeksan vuoden tutkimusjakson aikana kuvaa funktio

$$f(t) = 12t^3 - 4t^2 + 2t + 200$$

Vastaa seuraaviin kysymyksiin.

- (a) Kuinka paljon populaatio on muuttunut ensimmäisen viiden vuoden aikana?
 (b) Mikä on populaation maksimisuuruus tutkimusaikana?
 (c) Minä vuonna populaation kasvu oli suurinta?

(6p)

3 Analyysin sovellukset

6. Ympyräkartion pohjan halkaisijan ja kartion korkeuden yhteenlaskettu pituus on 10 senttimetriä. Määritä kartion suurin mahdollinen tilavuus kuutiosenttimetrin tarkkuudella. Piirrä siisti mallikuva, johon on merkittävää oleelliset asiat.

(6p)

7. Kuvitteellisen valtion rahavaroja (miljardeissa dollareissa) esittää käyrä

$$\mathcal{H}(z) = \sqrt{2z} + 3^{-z} - 3z + 5,$$

missä z on kulunut aika jossakin yksiköissä. Määritä haarukoimalla kahden desimaalin tarkkuudella, milloin valtio menee konkurssiin.

(6p)

8. (Jokeritehtävä**) Kirjoita tarina funktiosta $f(x) = x^4 - 4x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5$, jossa kerrot siitä kaiken, mitä osaat ja piirrät kuvan. Käytä apuna kurssilla oppimiasi uusia käsitteitä, kuten mm. derivaatta, funktion jatkuvuus, funktion/ derivaatan nollakohtien merkitys, lokaalit ja globaalit ääriarvopisteet jne. Laske lisäksi myös derivaatan "jälkeläinen" eli funktio, joka kuvaa derivaatan muutosnopeutta. Voit aloittaa esimerkiksi seuraavasti:

"Neljännen asteen funktio f , muotoa ..., asuu ja voi hyvin reaalityyppisyydessä \mathbb{R} . Tyypiltään se on polynomifunktio, joten sille kelpaavat ruoaksi mitkä tahansa avaruuden \mathbb{R} luvut. Maksimaalisen arvon funktio saavuttaa kuitenkin silloin, kun sille annetaan luku ... jne jne jne"

Kirjoitelman lisäksi sinun tulee toki laskea kaikki tarvittavat tiedot funktiosta. **HUOM!** Matemaattisen osaamisen lisäksi tehtävän arvioinnissa kiinnitetään erityistä huomiota kielioppiin, lauserakenteisiin, välimerkkien käyttöön sekä tekstin johdonmukaisuuteen.

(9p)

MB05 laajempi kotitehtävä

Laajemman kotitehtävän tarkoituksena on mitata kurssilla tehtyä työtä mahdollisimman monipuolisesti. Kotitehtävä sisältää kaksi laskutehtävää, toinen tilastotieteestä ja toinen todennäköisyyslaskennasta.

Tehtävien vastaukset kirjoitetaan puhtaaksi siistillä käsialalla konseptipaperille, jossa on kahden ruudun marginaali ja selvästi merkitty tehtävännumero marginaaliin. Lisäksi kirjoitetaan konseptiin oma nimi. Tehtävät ratkaistaan numerojärjestyksessä.

HUOM. Tehtävät tehdään itsenäisesti. Työ palautetaan kirjallisena opettajalle tai opettajainhuoneen laatikkoon 22.11.2010 mennessä.

1 Tilastotiede

1. Muutaman NBA:n koripallojoukkueen tietoja on esitetty taulukossa 1. Vastaa seuraaviin kohtiin.
 - (a) Määritä kaikkien muuttujien mitta-asteikoiden tyypit. Perustele.
 - (b) Piirrä pylväsdiagrammikuvaaja, jossa on esitetty joukkueiden arvot ja liikevaihdot sopivalla tavalla.
 - (c) Laske muuttujien A, L ja V arvojen keskiarvot, varianssit ja keskihajonnat. Taulukoi järkevästi.
 - (d) Laske muuttujien A ja V välinen korrelaatiokerroin.
 - (e) Laske muuttujien A ja V välinen korrelaatiokerroin, mutta jätä joukkue Portland Trail Blazers pois analyysistä. Kuinka tulos muuttuu ja mistä syystä? Laske myös selitysaste.
 - (f) Määritä muuttujien A ja L välinen regressiosuora. Anna vastaus sopivalla tarkkuudella.

Taulukko 1: NBA:n joukkueita yrityksen näkökulmasta. Rahamäärät on ilmoitettu miljoonissa dollareissa (milj. \$).

Joukkue	Arvo (A)	Liikevaihto (L)	Vuositulot (V)
Los Angeles Lakers	447	149	22,8
New York Knicks	401	160	13,5
Portland Trail Blazers	272	97	-85,1
Toronto Raptors	249	96	10,6
Orlando Magic	199	80	13,1

(12 p)

2 Todennäköisyyslaskenta

2. Kitarassa on kuusi kieltä: E, A, D, G, B ja e (Iso E ja pieni e ovat eri kieliä). Vastaa seuraaviin kysymyksiin. Kysymyksissä tarkastellaan kitaran soittoa yhdellä kädellä (kielten näppäily tai plektralla soittaminen). Eli erilaisia vasemman käden otteita ei tarkastella lainkaan.

- (a) Soitetaan satunnaisesti (silmät kiinni tms. muulla menetelmällä) yhtä kieltä. Millä todennäköisyydellä soitettu kieli sattuu olemaan E tai e?
- (b) Soitetaan kaksi kertaa peräkkäin kitaran kieltä, joka on satunnaisesti valittu erikseen molemmilla soittokerroilla. Mikä on todennäköisyys, että soitetaan kahta eri kieltä? Perustele.
- (c) Kuinka monta erilaista tapaa on (teoriassa) soittaa kolmea kieltä kitaralla? Oletetaan, että kielten soittojärjestyksellä ei ole merkitystä.
- (d) Kuinka monella tavalla voi soittaa kolmea kieltä, jos kielten soittojärjestyksellä on merkitystä?
- (e) Määritä (c)- ja (d)-kohtien tulosten suhde ja kommentoi tulosta.

(8 p)

3. Pakastealtaassa on kalapuikkoja 7 pakettia, pakastevihanneksia 4 pussia ja vadelmia 6 pussia. Kun elintarvikepakkauksia poimitaan altaasta, niitä ei palauteta takaisin (paitsi siirryttäessä tehtävän kohdasta toiseen, esimerkiksi (a)-kohdasta (b)-kohtaan, käytetään (b)-kohdassa jälleen alkuperäisiä määriä).

- (a) Millä todennäköisyydellä kolme satunnaisesti altaasta poimittua elintarvikepakkausta sisältävät kaikki kalapuikkoja?
- (b) Mikä on todennäköisyys, että viidestä satunnaisesti valitusta elintarvikepakkauksesta ainakin 1 sisältää vadelmia?
- (c) Laske todennäköisyys sille, että neljästä satunnaisesti valitusta pakkauksesta korkeintaan 2 sisältää pakastevihanneksia.

(4 p)

MB05 Tilastot ja todennäköisyys, uusintakoe

LUE OHJEET ENNEN KOKEESEEN VASTAAMISTA.

Ohjeet

- Kirjoita vastauspaperiin oma etu- ja sukunimesi sekä opetusryhmä.
- Laita marginaali, 3-5 ruutua sivun ulkoreunasta mitattuna.
- **Tehtäviä on seitsemän (7), joista lasketaan maksimissaan VIISI (5) tehtävää oman valinnan mukaan.** Tehtävien maksimipistemäärä on kuusi (6) pistettä tehtävää kohden.
- Kirjoita jokainen tehtävä omalle sivulleen / sivuilleen.
- | |
|-----------------------------------------|
| Kokeen maksimipistemäärä on 30 pistettä |
|-----------------------------------------|
- Tämä paperi palautetaan vastauspaperin välissä.

Laskumekaniikka

1. (a) Sievennä lauseke $\sqrt{(-a)^2 - 2a + 1} - (+a - 1)$ ja määritä lausekkeen arvo, kun $a = 1,43 \cdot 10^{-2}$.

- (b) Ratkaise yhtälö

$$\frac{x}{4} - \frac{3}{16}x + 3 = 2$$

(6p)

2. (a) Ratkaise yhtälö

$$\frac{1}{7}x - x = -1 - \frac{4}{x}$$

- (b) Todista tai kumoa seuraava väite:

”Rationaaliluvun vastaluvun neliö on aina suurempi kuin luku itse.”

Päteekö väite, jos tarkastellaan luonnollisten lukujen joukkoa?

(6p)

3. (a) Keksi kaksi polynomifunktiota $f(x)$ ja $g(x)$, joille pätee

$$f(x) = [g(x)]^2$$

Päteekö keksimillesi funktiolle myös $f(x) \leq g(x)$ kaikille reaaliluvuille x ?

- (b) Piirrä funktion $h(z) = 4z^2 - 1$ kuvaaja välillä $[-1, 1]$. Mikä on funktion $h(z)$ pienin arvo ks. välillä kuvan perusteella?

(6p)

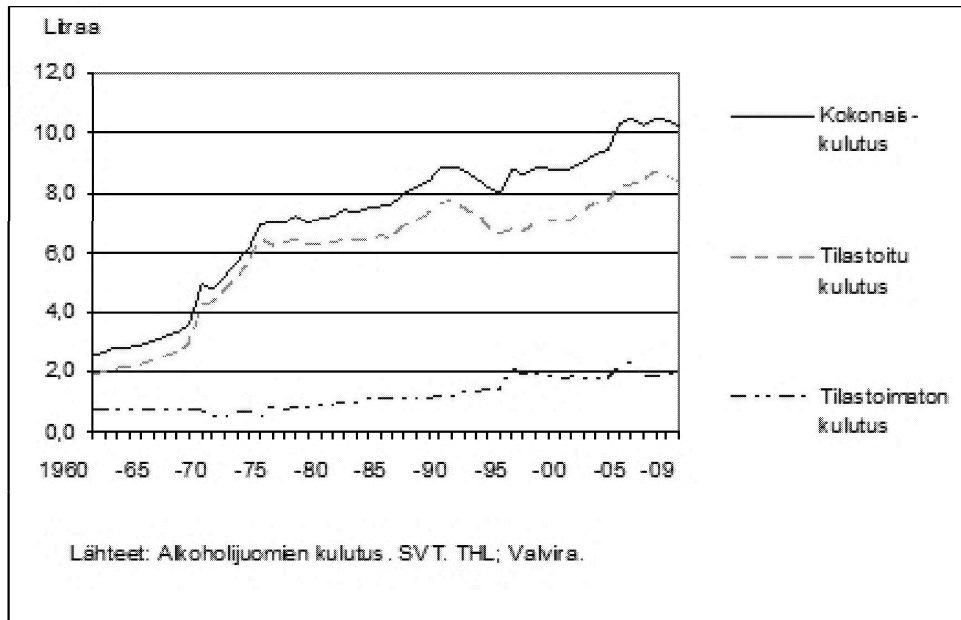
Tilastoja

4. Tarkastellaan kuvaa 1, joka esittää suomalaisten alkoholin kulutusta vuosina 1960–2009. Seuraavissa kysymyksissä käsitellään alkoholin kokonaiskulutusta.

- (a) Arvioi kuvan perusteella, kuinka paljon suomalainen kulutti puhdasta alkoholia vuonna 1990.

- (b) Laske edellisen kohdan tuloksen perusteella arvio sille, kuinka montaa olutpulloa tämä vastaa (oluessa on alkoholia 4,8 % ja pullon koko on 0,33 litraa). Montako pulloa meni tämän arvion perusteella viikossa (vuodessa on 52 viikkoa)?

- (c) Luonnehdi sanallisesti alkoholin kokonaiskulutuksen muutoksia vuosina 1960–1975 ja laske keskimääräinen vuosittainen kulutuksen muutos ks. aikavälillä. Määritä myös keskimääräinen vuosittainen kulutuksen muutos aikavälillä 1975–2009 ja vertaa tuloksia toisiinsa.



Kuva 1: Suomalaisen alkoholin kulutus 100-prosenttisena alkoholina mitattuna vuosina 1960–2009. lähde: tilastokeskus

(6p)

5. Taulukossa 1 on esitetty muutaman suomalaisen kunnan erilaisten alkoholijuomien käyttömääriä. Tutki viinien ja mallasjuomien käytön riippuvuutta toisistaan laskemalla niiden välinen korrelaatiokerroin.

Taulukko 1: Alkoholijuomien myynti Etelä-Suomen kunnissa, tuhansina litroina. lähde: tilastokeskus

Kunta	Viinejä	Mallasjuomia
Hamina	234	1921
Kotka	715	5322
Miehikkälä	0	82
Virolahti	43	323

(6p)

Todennäköisyyslaskentaa ja kombinatoriikkaa

6. Miguel menee R-kioskille ostamaan lehtiä. Hän valitsee lehtiä satunnaisesti: valitsemistodennäköisyydet lehtien aihepiirien mukaisesti ovat taulukossa 2. Lehtiä on kioskilla niin paljon, että valitsemistodennäköisyys ei muutu, kun lehtiä poimitaan hyllystä. Millä todennäköisyydellä Miguelin valitsemasta kahdesta lehdestä

- (a) korkeintaan yksi liittyy kotiin ja perheeseen?
- (b) ainakin toinen liittyy aikuisviihteeseen?
- (c) korkeintaan kaksi liittyvät autoihin tai kuntoiluun?

Taulukko 2: R-kioskin lehtien aiheet ja niiden valitsemistodennäköisyydet prosentteina. Oletetaan, että todennäköisyydet eivät muutu, vaikka lehtiä poimitaan hyllystä.

AIHE				
Autot	Tietotekniikka	Koti ja perhe	Kuntoilu	Aikuisviihde
15 %	30 %	17 %	22 %	16 %

(6p)

7. Flyygelissä on 88 kosketinta. Kuinka monella eri tavalla voidaan soittaa neljä eri ääntä, jos äänten soittojärjestyksellä

- (a) on merkitystä?
- (b) ei ole merkitystä?

Laske (a)- ja (b)-kohtien tulosten suhde ja kommentoi tulosta.

(6p)

Kaavakokoelma

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$
$$s_x^2 = s_{n-1}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$
$$s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$
$$r_{xy} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$