Lyhyen matematiikan ylioppilaskokeiden analysointi 2007–2009

R. E. Järvinen[1]

Seuraavassa analysoidaan lyhyen matematiikan ylioppilaskokeiden tehtävien sisältöjä vuosilta 2007–2009. Tässä vaiheessa tutkimus kattaa viisi ylioppilaskoetta, joista jokaisesta on tarkasteltu kymmenen ensimmäistä tehtävää. YTL:n ohjeiden mukaisesti nämä tehtävät ovat sellaisia, jotka on mahdollista ratkaista lyhyen matematiikan pakolliset kurssit suorittamalla. Ylioppilastutkinnon matematiikan kokeen ohjeistus muuttui juuri kevään 2007 kokeeseen, ja kaikki tässä raportissa analysoidut kokeet ovat uuden ohjeistuksen mukaan laadittuja.

Jokaisen tehtävän jälkeen on esitetty sanallisesti, kuinka tehtävässä voi edetä ja mitä matematiikan osa-alueita täytyy hallita tehtävän nujertamiseksi. Ideana on, että *opiskelija oppii muodostamaan sanallisesta hahmotelmasta eksaktin matemaattisen päättelyketjun ja ymmärtää, kuinka matemaattiset yhtälöt kuvaavat tarkasteltavaa asiaa.* Tavallisten malliratkaisujen lukeminen tämän monisteen ohella on suositeltavaa, sillä omien päättelyiden tarkastaminen ja hiominen on yksi tärkeimmistä matemaattisen ajattelun kehittymistä edesauttavista menetelmistä.

Tehtävien vastaukset on kirjoitettu raportin loppuosaan tehtävien esitysjärjestyksessä.

1 Kevät 2007

Tehtävä 1

a) Ratkaise yhtälö $\frac{3}{4}\left(x-\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{5}\right)$

b) Ratkaise yhtälö $7x(3+7x)-4=0$.

c) Mikä on lausekkeen $\frac{a(a-1)}{x}+ax$ arvo, kun $x=a-1$?

Ensimmäisessä kohdassa tarvitaan algebrallisia peruslaskutoimituksia, eli termien ryhmittelyä, kertomista ja murtolukujen kerto- ja yhteenlaskua. Lisäksi on osattava yhtälön ratkaisun yleiset periaatteet, eli siirtää muuttujasta riippuvat termit toiselle puolelle yhtälöä ja vakiot toiselle puolelle. Toinen kohta puolestaan vaatii toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan käyttöä sen täydellisessä muodossa, ja vastauksena saadaan kaksi eri ratkaisua. Huomaa, että toisen asteen yhtälön ratkaisukaavan käyttö edellyttää myös neliöjuuren ja potenssien osaamista. Kolmannessa kohdassa ajatellaan, että annettu symboli a on vakio ja lopullinen vastaus saadaan sen lausekkeena (periaatteessa ei tarvita muuta kuin algebrallisia perustaitoja, vaikein osuus on todennäköisesti symbolin käsittäminen tunnetuksi luvuksi).

Tehtävä 2

a) Suorakulmaisen kolmion kateettien pituudet ovat 1 ja 3. Määritä kolmion terävien kulmien suuruudet 0,01 asteen tarkkuudella.

b) Määritä funktion $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-4x+\frac{7}{3}$ derivaatta.

c) Määritä geometrisen lukujonon $\frac{2}{3},\frac{4}{9},\ldots$ kolmas termi.

Ensimmäisessä kohdassa on hyödyksi piirtää suorakulmainen kolmio ja käyttää tangenttia, jolla saa laskettua yhden kulman suuruuden. Sitten tarvitaan kolmion kulmien summaa, jotta saadaan toinen kulma selville. Vastaus tulee lisäksi pyöristää annettuun tarkkuuteen. Toisessa koh-

[1]Email: rierjarv@gmail.com

dassa tulee osata mekaanisesti derivoida polynomi käyttäen hyväksi polynomin derivointisääntöjä. Derivaatan ymmärtämistä millään tavoin ei vaadita. Kolmannessa kohdassa tarvitaan geometrisen lukujonon määrittelyä ja tulee laskea lukujonolle karakteristinen suhdeluku (jonka nyt selvästi nähdään olevan $2/3$). Geometrinen lukujonohan on muotoa $aq, aq^2, aq^3, \ldots$

Tehtävä 3 Suorakulmion yksi sivu on 4,42 m ja suorakulmion pinta-ala on 32,20 m^2. Määritä suorakulmion

a) sivujen pituudet,

b) lävistäjän pituus.

Ensin tulee muodostaa yksinkertainen yhtälö tuntemattomalle sivun pituudelle käyttämällä hyväksi suorakulmion pinta-alan kaavaa. Yhtälöstä ratkaistaan toinen sivu (vastakkaiset sivut yhtä pitkiä) ja kun molemmat sivut tunnetaan, voidaan käyttää Pythagoraan lausetta suorakulmion lävistäjän pituuden laskemiseen. Pythagoraan lause vaatii neliöjuuren ja toisen potenssin osaamisen. Lopuksi tulos täytyy vielä pyöristää samaan tarkkuuteen kuin alkuarvot.

Tehtävä 4 Tuotteen myyntitulot kasvoivat edelliseen vuoteen verrattuna 5,0 % vuonna 2004 ja 3,0 % vuonna 2005. Vuonna 2003 tuotteen valmistuskustanukset olivat 91 % tavaran myyntituloista. Vuonna 2004 valmistuskustannukset olivat 7,1 % suuremmat kuin vuonna 2003, ja seuraavana vuonna ne nousivat edelleen 1,2 %. Kuinka monta prosenttia myyntitulot olivat valmistuskustannuksia suuremmat vuonna 2005?

Tehtävässä tarvitaan perusarvon käsitettä, eli otetaan lähtökohdaksi esimerkiksi vuosi 2003 ja merkataan myyntituloja ks. vuonna perusarvolla a. Nyt lasketaan annettujen tietojen mukaisesti perusarvon kertaantuminen vuoteen 2005 (vuoden 05 myyntitulot) ja vastaavasti valmistuskustannuksille. Lopussa tarvitaan prosenttilaskentaa, eli kuinka monta prosenttia suurempi on myyntitulojen määrä kuin valmistuskustannusten määrä, ts. lasketaan näiden osamäärä ja vähennetään siitä ykkönen. Lopussa pyöristetään vastaus vielä mielekkääseen tarkkuuteen (2:n numeron tarkkuus).

Tehtävä 5

a) Määritä pisteiden (1,2) ja (4,3) kautta kulkevan suoran yhtälö muodossa $y = kx + b$.

b) Onko piste (120,40) tällä suoralla?

Ensimmäisessä kohdassa tarvitaan suoran yhtälön yleinen muoto, johon sijoittamalla annetut pisteet voidaan laskea suoran kulmakerroin. Sijoittamalla kulmakerroin suoran yhtälöön saadaan lauseke x:n ja y:n riippuvuudelle. Tehtävä on siinä mielessä hankalampi kuin tavallisen yhtälön ratkaisu, sillä nyt muuttujia on kaksi ja niillä on keskinäinen riippuvuussuhde (eli kun toista muutetaan, niin myös toinen muuttuu). Vastauksena saadaan riippuvuuden osoittava lauseke eli funktio (suoran yhtälö).

Toisessa kohdassa testataan ensimmäisen kohdan yhtälöllä, onko annettu piste suoralla. Sijoitetaan siis annetut pisteet yhtälöön (x ja y) ja katsotaan, antaako yhtälö tuloksen, joka on paikkansapitävä (eli molemmat puolet yhtä suuria). Jos yhtälö ei toteudu, niin silloin piste ei ole suoralla. Tehtävässä vaaditaan suoran funktionaalisen muodon ja graafisen esityksen yhteys ja lisäksi se, että itse asiassa suora on pistejoukko.

Tehtävä 6

a) Millä x:n arvoilla on $2^x = 1$?

b) Ratkaise yhtälö $2^{x^2-2} = 1$

Ensimmäisessä kohdassa muistetaan, että nollas potenssi mistä tahansa reaaliluvusta on yksi, joten yhtälö voidaan edelleen kirjoittaa muodossa $2^x - 2^0 = 0$. Tästä muodosta kenties selvemmin näkee, että ainoastaan $x = 0$ käy vastaukseksi. Vastauksen voi perustella myös tarkemmin ottamalla puolittain logaritmin, jolloin saadaan suoraan haluttu tulos. Tällöin tulee osata logaritmin laskusääntöjä.

Toisessa kohdassa saadaan vastaavalla tavalla pääteltynä (tai logaritmin avulla) toisen asteen yksinkertainen yhtälö, jolla on kaksi ratkaisua. Täytyy osata yhtälön ratkaisu neliöjuuren avulla ja huomata, että toisen asteen yhtälöllä on kaksi ratkaisua.

Tehtävä 7 Lentokone lähestyy Oulunsalon kenttää kolmen asteen kulmassa maahan nähden. Kiitoradan pituus on 2,5 km, ja kone koskettaa kiitorataa 300 metrin päässä sen alkupäästä. Kuinka kaukana kiitoradan alkupäästä (vaakasuoraan ajateltuna) kone oli 500 jalan korkeudessa (1 jalka = 0,3048 m)? Kuinka kauan tästä kului maakosketukseen, jos lentokoneen lähestymisnopeus ilman suhteen oli 270 km/h? Oleta, että sää oli tyyni.

Tehtävässä kannattaa piirtää mallikuva, joka oleellisesti selventää tilannetta. Havaitaan, että muodostuu kaksi yhdenmuotoista kolmioita, joiden symmetrian perusteella voi (trigonometriaa käyttäen) ratkaista kysytyn matkan pituuden (laskemalla ensin pienemmän kolmion kannan pituuden). Yhdenmuotoisuuden nojalla kolmion sivujen mitat ovat samassa suhteessa, joten pienemmän kolmion korkeuden ja kannan suhteen on oltava sama kuin suuremman kolmion korkeuden ja kannan suhde (tarvitaan verrantoa). Vastaavalla tavalla voidaan selvittää kolmioiden hypotenuusien suhteet (pythagoras), jolloin saadaan lentokoneen kulkema matka sen ensimmäiseen maakosketukseen ja voidaan laskea tasaisen liikkeen kaavalla siihen kuluva aika. Vastaus tulee pyöristää sopivaan tarkkuuteen, eli 2-3 numeroa.

Toinen tapa laskea tehtävä on merkitä muuttujat x ja y siten, että $x + 300$ m on kysytty etäisyys ja y on suorakulmaisen kolmion hypotenuusa (tämä oli malliratkaisussa). Suht monipuolisen pyörityksen jälkeen saadaan halutut vastaukset.

Tehtävä 8 Määritä funktion

$$f(x) = x(3 - 4x - x^2)$$

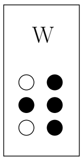
suurin ja pienin arvo välillä $[-1, 3]$.

Tavallisen polynomifunktion suurin ja pienin arvo löytyvät luonnollisesti sen derivaatan nollakohdista tai annetun määrittelyvälin päätepisteistä (funktio on jatkuva kaikkialla). Derivoimalla polynomi saadaan toisen asteen polynomi, jonka nollakohdat löydetään asettamalla polynomin arvo nollaksi ja käyttämällä toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa. Saadaan vastaukset (toinen nollakohdista ei kuulu määrittelyväliin, hylätään se) ja sitten lasketaan funktion f arvo päätepisteissä ja toisessa nollakohdassa (määrittelyalueessa) ja katsotaan, mikä arvo on suurin ja mikä pienin ja kirjataan ne vastauksina (tarkkoina arvoina eli murtolukuina tai kokonaislukuina) ylös. Huomaa tehtävän matemaattinen luonne eli se, että tarkat arvot ovat käytössä joka paikassa.

Tehtävä 9 Täyttäessään 20 vuotta Laura oli 25 prosenttia vanhempi kuin sisarensa Veera. Kuinka monta prosenttia sisartaan vanhempi Laura on täyttäessään 30 vuotta?

Tehtävässä tarvitaan prosenttilaskentaa, eli Lauran iästä voidaan laskea Veeran ikä alussa (kun Laura on 20 v.) Kun lasketaan molempien ikään lisää kymmenen vuotta, voidaan laskea uudesta Veeran ja Lauran iästä (erotus jaettuna Veeran iällä) uusi prosenttiosuus. Tehtävä vaatii prosenttilaskennan hallintaa sekä käytännön maalaisjärkeä. Tulos tulee pyöristää sopivaan tarkkuuteen (joka ilmeisesti on kaksi numeroa, vaikka mallivastauksissa oli annettu kolme numeroa)

Tehtävä 10 Ranskalaisen Louis Braillen vuonna 1825 kehittämä pistekirjoitus on kohokirjoitusta, jota luetaan sormin. Pistekirjoitusjärjestelmässä kutakin merkkiä kohti on käytettävissä kuusi kiinteää paikkaa, joihin voidaan asettaa yhdestä kuuteen pistettä (esimerkkinä kuvassa 1 kirjain W). Kuinka monta erilaista merkkiä järjestelmässä voidaan esittää?



Kuva 1: Pistekirjoitusesimerkki

Tehtävän voi ajatella suoraviivaisesti siten, että kussakin paikassa on kaksi mahdollisuutta, eli piste tai ei pistettä. Koska paikkoja oli kuusi, niin yhteensä saadaan 64 mahdollisuutta (kakkosen potenssiin). Toisaalta, merkki ei voi olla tyhjä (sillä tällöin merkkiä ei voi kosketuksella tunnistaa), joten tyhjä vaihtoehto jää pois. Vastaukseksi saamme siis 63 merkkiä.

Tehtävän tarkoituksena oli mitata kombinatorisia taitoja, joten voidaan ajatella myös tätä kautta. Käytetään binomikertoimia, jotka kuvaavat sitä, kuinka monella eri tavalla voidaan johonkin tiettyyn määrään paikkoja asettaa pisteet. Vähintään yksi piste on asetettava, korkeintaan kuusi, jolloin saadaan

$$\binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 63$$

Binomikerroin oli määritelty seuraavasti:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

1.1 Syksy 2007

Tehtävä 1

a) Ratkaise yhtälö $7x^2 + 3x = 0$.

b) Ratkaise yhtälö $\frac{1}{4}x + 1 = \frac{1}{5}(2x + 2)$.

c) Sievennä lauseke $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$

Ensimmäisessä kohdassa kannattaa ottaa muuttuja yhteiseksi tekijäksi, jolloin saadaan, että muuttuja on nolla tai sitten ratkaistavaksi jää ensimmäisen asteen yhtälö. Tehtävä edellyttää yhtälön ratkaisun osaamista ja tekijöihin jakoa ja sitä, että toisen asteen yhtälöillä on olemassa kaksi ratkaisua.

Toisessa kohdassa on ensimmäisen asteen yhtälö, jonka muokkaamiseen tarvitaan perusalgebran lisäksi myös murtolukujen laskutoimituksia. Termien siirtelyt yms. muut jutut tulee hallita, ja loppuvastaus saadaan suoraviivaisesti.

Kolmannessa kohdassa on kyse ainoastaan polynomilausekkeen sieventämisestä, eli muokataan lauseketta algebran laskusäännöillä mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon (yksinkertainen muoto tarkoittaa sellaista, jossa on vain yksi termi, jossa osoittaja ja nimittäjä).

Tehtävä 2

a) Suorakulmaisen kolmion hypotenuusan pituus on 11 ja toisen kateetin pituus 5. Määritä kolmion terävät kulmat 0,01 asteen tarkkuudella.

b) Derivoi funktio

$$f(x) = 3x^{2007} - 15x^{12} + 2x - 12345.$$

c) Mikä on aritmeettisen lukujonon 1,4,... kymmenes termi?

Ensimmäisessä kohdassa kolmion kulmat voidaan määrittää trigonometristen peruskäsitteiden, kuten sinin, kosini ja tangentin avulla. Lisäksi tarvitaan kolmion kulmien summaa ja lopullinen vastaus on pyöristettävä oikeaan tarkkuuteen.

Toisessa kohdassa tulee mekaanisesti derivoida polynomi (derivointisäännöt).

Kolmannessa kohdassa on tunnistettava aritmeettinen lukujono, eli peräkkäisten jäsenten välinen etäisyys on vakio. Tällä perusteella voidaan määrittää kymmenes termi suoraan laskemalla alkuarvo + yhdeksän siirtymää.

Tehtävä 3 Suomen sähkönkulutus vuonna 2005 oli 84,9 TWh (terawattituntia). Tästä katettiin omalla ydinvoimalla 26,3 %, muilla kotimaisilla energianlähteillä 53,7 % ja tuontisähköllä loput. Olkiluodon uusi ydinvoimala lisää sähköntuotantoa 14 TWh:lla vuonna 2009. Oletetaan, että sähkönkulutus on tällöin noussut vuoden 2005 tasosta 12 %, muita muutoksia kotimaisessa energiantuotannossa ei ole tapahtunut ja tuonnilla katetaan edelleen kotimaisen tuotannon ylittävä osuus. Mikä on tällöin kotimaisen ydinvoiman ja mikä tuontisähkön suhteellinen osuus kokonaiskulutuksesta?

Tehtävässä tarvitaan prosenttilaskennan perusasioita ja tulee lisäksi osata ajatella käytännöllisesti (edetä askel kerrallaan). Tulee mm. laskea annetuista prosenttiosuuksista eri sähköntuotannon osa-alueiden todelliset energiamäärät ja laskea niiden sekä annettujen tietojen avulla uudet, vuoden 2009 energiamäärät.

Tehtävä 4 Määritä suorien

$$y = 2x - 3 \text{ ja } y = 3x - 2$$

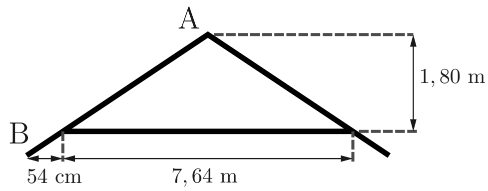
leikkauspiste P. Suora s kulkee pisteiden P ja $Q = (7, 7)$ kautta. Määritä suoran s yhtälö. Piirrä kuvio.

Ensimmäiseksi määritetään leikkauspiste, joka saadaan, kun asetetaan kahden suoran y-koordinaatit yhtä suuriksi (leikkauspisteessa suorien x- ja y-koordinaatit ovat yhtä suuret). Ratkaistaan tästä x ja sijoitetaan saatu tulos toiseen annetuista suorien yhtälöistä ja saadaan vastaava y-koordinaatti. Kyseessä on siis yhtälöparin perusratkaisu. Jälkimmäisessä kohdassa tulee muodostaa suoran yhtälö sillä tiedolla, että suora kulkee annettujen pisteiden kautta. Tulee siis laskea kulmakerroin ja sitten sijoittaa yleiseen suoran yhtälöön jompi kumpi annetuista pisteistä, jotta saadaan yhtälön perusmuoto. Kuva piirretään eksaksisti viivottimella ja vasta algebrallisen laskun jälkeen (jolloin kuva ei johda harhaan).

Tehtävä 5 Henkilö osti 150 gramman erän maustettua teetä 3,30 eurolla ja halvempaa mustaa teetä, jonka hinta oli 5,50 €/kg. Kuinka monta grammaa mustaa teetä tulisi maustetee-erään lisätä, jotta sekoituksen kilohinta olisi puolet maustetun teen kilohinnasta?

Tehtävässä tulee ensin laskea mausteteen kilohinta. Kun se tiedetään, tiedetään myös, mikä on tavoitekilohinta. Sitten tulee miettiä, miten kilohinta lasketaan, eli se saadaan jakamalla keskenään seoksen hinta ja seoksen määrä kilogrammoina ilmaistuna. Tämä asetetaan yhtä suureksi kuin tavoitehinta, jolloin saadaan laskettua lopputulos.

Tehtävä 6 Talon harja on 1,80 metriä korkeammalla kuin sivuseinien yläreunat. Räystään kohtisuora etäisyys seinästä on 54 cm. Päätyseinän pituus on 7,64 m. Talon harja on keskellä kattoa. Määritä lappeen pituus AB senttimetrin tarkkuudella (kuva 2).



Kuva 2: Tehtävän 6 kuva

Tehtävässä on kaksi yhdenmuotoista kolmiota (yhdenmuotoisuuden voi perustella esimerkiksi sillä, että kolmioiden toisiaan vastaavat kulmat ovat yhtä suuret). Yhdenmuotoisuudet lisäksi tulee käyttää Pythagoraan lausetta kolmion hypotenuusaa laskettaessa.

Tehtävä 7 Etelämantereen jääpeitteen sulaessa valuu vuodessa mereen 150 kuutiokilometriä vettä. Jos tämä vesimäärä leviäisi tasaisesti kaikkiin valtameriin, niin kuinka monta millimetriä valtamerien pinta nousisi? Maapallon ympärysmitta on 40000 kilometriä, ja valtameret peittävät 70 % maapallon pinnasta.

Tehtävässä kannattaa edetä siten, että ensin lasketaan valtamerien kokonaispinta-ala pallon pinta-alan kaavaa 0,7:lla kertomalla. Maapallon säde saadaan jakamalla ympärysmitta 2π:llä. Koska valtamerien orientaatiota ja asettumista maapallon pinnalla ei tiedetä, täytyy olettaa, että valtameret sijaitsevat tasossa, eli valtamerien pinnan nousu saadaan suoraan jakamalla tilavuus lasketulla pinta-alalla.

Tehtävässä suunnittelussa YTL on epäonnistunut siinä mielessä, että epämääräisten fysikaalisten oletusten tekeminen ei suoranaisesti kuulu matematiikkaan (vähintään pitäisi tarkasti perustella, miksi tasoapproksimaatio on laillinen eikä vain sanoa, että niin on).

Tehtävä 8 Keltaista ja sinistä väripigmenttiä käytetään kahden erisävyisen vihreän maalin sekoittamiseen. Maaliin A tarvittiin litraa kohden 80 g keltaista pigmenttiä ja 110 g sinistä pigmenttiä, maaliin B vastaavasti 120 g keltaista ja 90 g sinistä pigmenttiä. Kuinka monta litraa kumpaakin maalia valmistettiin, kun keltaista pigmenttiä käytettiin 3,2 kg ja sinistä 3,5 kg?

Tehtävässä muodostetaan yhtälöt keltaisen ja sinisen väripigmentin menekille, eli merkitään vaikkapa muuttujalla x maalin A määrää ja muuttujalla y maalin B määrää. Tällöin saadaan kaksi yhtälö, joissa esiintyy kaksi tuntematonta. Yhtälöpari ratkaistaan tavalliseen tapaan (algebralliset operaatiot, sijoittaminen toiseen yhtälöön,. . .)

Tehtävä 9 Vanhassa tarinassa šhakkilaudan 64 ruudulle sijoitetaan vehnänjyviä: ensimmäiselle ruudulle yksi, toiselle kaksi, kolmannelle neljä jne. Seuraavalla ruudulla on aina edellisen ruudun määrä kaksinkertaisena. Kuinka monta ruutua voidaan täyttää Suomen vuotuisella 700 miljoonan kilogramman vehnäsadolla, jos oletetaan, että yksi vehnänjyvä painaa 25 mg?

Tehtävä voidaan aloittaa laskemalla esimerkiksi vehnänjyvien kokonaismäärä, joka saadaan jakamalla kokonaismassa yhden jyvän massalla. Tämän jälkeen havaitaan, että jyvien määrää (laudan ruutujen määrän n suhteen) kuvaa geometrisen sarjan summa, jonka kaava löytyy esimerkiksi taulukkokirjasta:

$$\frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$$

Kirjoittamalla yhtälö edella lasketulle jyvien kokonaismäärälle ja summalausekkeelle saadaan logaritmin avulla laskettua tarvittavien ruutujen määrä n.

Tehtävä 10 Ratkaise graafisesti yhtälöryhmä

$$\begin{cases} y & \geq x-2 \\ 7x+2y & \geq 14 \\ 5x+4y & \leq 28 \end{cases}$$

Tehtävässä tulee määrittää se alue xy-tasossa, jonka pisteet toteuttavat kaikki kolme yllä olevaa yhtälöä. Nähdään, että kolme ehtoa ovat itse asiassa suoran yhtälöitä, ja niitä vastaaville suorille voimme laskea leikkauspisteet. Tämän jälkeen voidaan piirtää tilanteesta mallikuva ja tarkastella annettuja ehtoja yksi kerrallaan. Havaitaan, että ratkaisuksi tulee kolmion muotoinen alue, jonka kärkipisteinä ovat lasketut suorien leikkauspisteet. Yhtälöiden toteutumista voi kokeilla yksi kerrallaan esimerkiksi valitsemalla jonkin kiinteän testipisteen, esimerkiksi origon ja katsomalla, missä alueessa epäyhtälön toteuttavat pisteet ovat.

1.2 Kevät 2008

Tehtävä 1

a) Ratkaise yhtälö $2x + 1 = x^2 + 2x$.

b) Ratkaise yhtälöryhmä

$$2x + y = 1, \quad x - y = 0$$

c) Kumpi luvuista $\frac{5}{7}$ ja $\frac{6}{9}$ on suurempi? Perustele ratkaisusi likiarvoja käyttämättä esimerkiksi muodostamalla lukujen erotus.

Ensimmäisessä kohdassa saadaan yksinkertainen toisen asteen yhtälö, jossa ei tarvita ratkaisukaavaa. Huomaa, että ratkaisuja on kaksi. Toisessa kohdassa huomataan, että $x = y$ ja sijoitetaan tämä tulos ensimmäiseen annettuun yhtälöön, jolloin saadaan ratkaistua x ja sitten y. Kolmannessa kohdassa voi laskea yksinkertaisesti annettujen lukujen erotuksen perusalgebralla tai sitten esimerkiksi jakaa luvut keskenään, jolloin saa ykköstä pienemmän tai suuremman luvun ja siitä voi päätellä, kumpi annetuista luvuista on suurempi.

Tehtävä 2

a) Ratkaise yhtälö $5x - (1 - x) = 13x$.

b) Määritä lukujen 7,3,6,3,5,3,1 mediaani ja keskiarvo.

c) Sievennä lauseke

$$\frac{a+3}{a} : \frac{3a+9}{2a}.$$

Ensimmäinen kohta on tavallinen ensimmäisen asteen yhtälö, joka ratkeaa algebrallisilla laskutoimituksilla. Toisessa kohdassa mediaani on keskimmäinen luku suuruusjärjestyksessä pienimmästä suurimpaan (kahden keskimmäisen keskiarvo, jos keskimmäisiä lukuja on kaksi). Keskiarvo lasketaan summaamalla kaikki annetut luvut yhteen ja jakamalla lukujen määrällä. Kolmannessa kohdassa tulee suorittaa algebrallisia laskutoimituksia, lavennuksia ja supistuksia niin paljon, että viimeisestä muodosta ei enää voida supistaa (yksinkertaisin mahdollinen muoto, joka on tavallisesti yksittäinen murtolauseke).

Tehtävä 3

a) Laskettelurinteen kaltevuuskulma on 7,0 astetta ja rinteen korkeusero 180 metriä. Kuinka pitkä rinne on? Kuinka kauan kestää hiihtohissillä matka rinnettä pitkin alhaalta ylös, jos hiihtohissin nopeus on 6 km/h?

b) Suora kulkee pisteiden $(1, 0)$ ja $(3, 3)$ kautta. Kuinka suuren kulman se muodostaa x-akselin positiivisen suunnan kanssa? Anna vastaus asteen kymmenesosan tarkkuudella.

Ensimmäisessä kohdassa piirretään mallikuvana laskettelurinteestä suorakulmainen kolmio, josta tunnetaan korkeus ja rinteen kaltevuuskulma. Rinteen pituus saadaan laskettua suorakulmaisen kolmion trigonometrialla. Matkan ja annetun keskinopeuden avulla saadaan puolestaan laskettua matkaan kulunut aika perusfysiikasta tutulla tasaisen liikkeen yhtälöllä $t = s/v$, missä s on rinteen pituus ja v on annettu nopeus. Huomaa, että hiihtohissin nopeus tulee muuntaa sopiviin yksiköihin laskun kannalta (esimerkiksi metriä sekunnissa).

Toisessa kohdassa kannattaa piirtää annettu suora koordinaatistoon. Tässä voi edetä kahdella tavalla, eli muodostamalla suoran yhtälön ja laskemalla suoran kulmakertoimen, josta saadaan tieto kolmion kannan ja korkeuden välisestä suhteesta ja sen avulla voi laskea tangenttia käyttäen kysytyn kulman, tai sitten voi suoraan käyttää koordinaatistoon piirrettyä kolmiota ja laskea sen avulla kulman. Ensimmäinen tapa on hieman matemaattisempi ja sen käyttöä suosittelen.

Tehtävä 4 Kumiputken ulkohalkaisija on 53 mm ja seinämän paksuus 4 mm. Kuinka pitkä putken on oltava, jotta putkeen mahtuisi 3,0 litraa vettä?

Tehtävässä tarkastellaan sylinterin tilavuutta, joka lasketaan tutulla tavalla ympyräpohjan alan ja korkeuden (putken pituuden) tulona. Seinämän paksuuden ja ulkohalkaisijan avulla voimme laskea sisähalkaisijan ja sitä kautta pohjan alan. Kun muodostetaan yhtälö tilavuudelle pituuden ollessa muuttujana, niin saadaan laskettua pituus (ainoa tuntematon ks. yhtälössä). Tehtävässä tulee huomioida oikeat yksiköt sekä järkevä pyöristystarkkuus.

Tehtävä 5 Kännykkäliittymän A kuukausimaksu on 4 euroa ja puhelumaksu 0,09 euroa minuutilta. Kännykkäliittymässä B ei ole kuukausimaksua, mutta puhelumaksu on 0,12 euroa minuutilta. Määritä kuukausilaskun suuruus kummassakin tapauksessa lausekkeena, jossa muuttujana on puheaika minuutteina. Millä puheajalla liittymien A ja B kuukausilaskut ovat yhtä suuret?

Aluksi muodostetaan lausekkeet puheajoille siten, että muuttujalla x merkitään puheaikaa minuutteina. Asettamalla lausekkeet yhtä suuriksi saamme ensimmäisen asteen yhtälön, josta perinteisillä yhtälönratkaisumenetelmillä voidaan laskea kysytty aika (=puheaika, jolloin liittymien kuukausimaksu ovat yhtä suuret).

Tehtävä 6 Äänilähteen tuottaman äänen intensiteetti on kääntäen verrannollinen etäisyyden neliöön. Festareilla Miisa istui aluksi 50 metrin päässä orkesterista, mutta siirtyi sitten 15 metrin päähän orkesterista. Kuinka monta prosenttia kasvoi äänen intensiteetti?

Kääntäen verrannollisuuden avulla tehtävässä kannattaa lähteä liikkeelle siten, että merkitsee intensiteettiä alussa symbolilla I_0. Tiedetään, että intensiteetti 15 metrin päässä on suurempi kuin alkuperäinen 50 metrin päässä mitattu intensiteetti, eli voidaan kirjoittaa $I = x \cdot I_0$, missä I on intensiteetti 15 metrin päässä ja kerroin x kuvaa sitä, kuinka moninkertainen uusi intensiteetti on alkuperäiseen verrattuna. Jakamalla alkuperäinen ja uusi intensiteetti keskenään saadaan etäisyyksien neliöt jaettuna kääntäen keskenään, ja tästä yhtälöstä voidaan ratkaista kerroin x. Verrannollisuudessa tulee huomioida se, että yleisesti intensiteetti lasketaan yhtälöstä $I = a/r^2$, missä a on jokin tuntematon vakiokerroin.

Tehtävä 7 Pallo heitetään hetkellä $t = 0$. Sen lentokorkeus metreinä saadaan lausekkeesta

$$-0,15t^2 + 2,4t + 1,8,$$

missä t on aika sekunneissa. Kuinka korkealla pallo käy? Millä aikavälillä sen lentorata on laskeva?

Havaitaan, että yhtälö on toisen asteen käyrä eli paraabeli, joka aukeaa alaspäin. Näin ollen sillä on olemassa maksimipiste, joka saavutetaan sen derivaatan nollakohdassa. Derivoimalla lauseke saadaan ensimmäisen asteen yhtälö, josta voidaan ratkaista maksimikorkeus. Maksimikorkeuden voi varmistaa esimerkiksi laskemalla alkuperäisen lausekkeen arvon molemmilla puolilla ks. pistettä, joilloin saadaan pienemmät arvot kuin ks. pisteessä. Lentorata on laskeva annetulle lausekkeelle maksimikorkeuden ja maahan putoamisen välillä. Maanpinnan pallo kohtaa silloin, kun annettu lauseke on nolla, joten laskemalla tämä piste saadaan määritettyä kysytty väli (=väli, jolla derivaatta on pienempää kuin nolla). Tehtävässä tarvitaan derivointia ja funktioanalyysin perusteita (derivaatan nollakohta, vähenevä funktio) ja annettujen reunaehtojen soveltamista (pallo korkeimmassa kohdassa ja pallo maanpinnassa).

Tehtävä 8 Kulhossa on viisi punaista ja kymmenen mustaa palloa. Kulhosta poimitaan umpimähkään viisi palloa palauttamatta yhtäkään. Mikä on todennäköisyys, että ainakin yksi poimituista palloista on punainen? Millä todennäköisyydellä kaikki viisi ovat samanvärisiä?

Todennäköisyyksien toisistaan riippuvuus ja riippumattomuus ovat tämän tehtävän aiheita. Todennäköisyys sille, että ainakin yksi poimituista palloista on punainen, on sama asia kuin

1-(yksikään poimituista palloista ei ole punainen)

Tätä kautta (komplementtitodennäköisyys) on helppoa lähteä tehtävässä liikkeelle. Todennäköisyys sille, että kaikki ovat samanvärisiä, saadaan laskemalla yhteen kahden suotuisan tapauksen todennäköisyydet (kaikki punaisia tai kaikki mustia). Tulokset tulee pyöristää mielekkääseen tarkkuuteen.

Tehtävä 9 Lomapaketin hinta koostui hotelli- ja matkakustannuksista. Hotellikustannukset laskivat 5 % ja matkakustannukset nousivat 18 %. Muutosten jälkeen lomapaketin hinta oli sama kuin aikaisemminkin. Kuinka monta prosenttia matkakustannukset olivat lomapaketin hinnasta ennen muutoksia?

Tehtävässä kannattaa merkitä hotellikustannuksia esimerkiksi symbolilla x ja matkakustannuksia symbolilla y. Tulee muodostaa lauseke kysytylle asialle eli matkakustannukset jaettuna kokonaiskustannuksilla ja sen lisäksi kirjoittaa annettujen tietojen perusteella yhtälö kokonaiskustannuksille ennen ja jälkeen muutoksen. Vaatimalla, että kokonaiskustannus pysyy samana, saadaan riippuvuus muuttujien x ja y välille ja edelleen sijoittamalla kysytyn asian lausekkeeseen lopullinen vastaus.

Tehtavä 10 Kolmannen asteen polynomifunktiolla $ax^3 + bx^2 + cx + d$ on paikallinen minimi -2 kohdassa $x = 0$ ja paikallinen maksimi 1 kohdassa $x = 2$. Määritä kertoimet a, b, c ja d.

Polynomifunktio saavuttaa lokaalit ääriarvonsa sen derivaattafunktion nollakohdissa. Derivoimalla funktiota saadaan toisen asteen polynomi, jonka kaksi nollakohtaa tunnetaan. Näin saadaan kaksi yhtälöä. Lisäksi saadaan kaksi muuta yhtälöä, koska polynomin arvot maksimi- ja minimikohdissa tiedetään. Saadaan siis neljän yhtälön yhtälöryhmä, josta voi ratkaista annetut kertoimet a, b, c ja d. Tehtävässä tarvitaan derivointia, funktioanalyysin perusteita (lokaalit minimit ja maksimit derivaatan nollakohdissa) ja yhtälöryhmän ratkaisua.

1.3 Syksy 2008

Tehtävä 1

a) Ratkaise yhtälö $4x^2 + 9 = -12x$.

b) Ratkaise yhtälö $x = (x^2 + 3)/(x - 1)$.

c) Sievennä lauseke
$$\frac{5x + 3y}{3} + \frac{x - 6y}{2}.$$

Ensimmäisessä kohdassa on toisen asteen yhtälö, joka ratkeaa suoraviivaisesti ratkaisukaavalla ja perusalgebralla. Toisessa kohdassa tulee huomioida se, että vastaukseksi ei voi tulla $x = 1$. Muuten lasku etenee ensimmäisen asteen yhtälöksi, joka ratkeaa tavalliseen tapaan (termien siirtäminen puolelta toiselle, yhteen- ja vähennyslasku). Kolmannessa kohdassa käytetään algebrallisia menetelmiä ja laventamista/supistamista ja muokataan annettu lauseke mahdollisimman yksinkertaiseen muotoon. Tehtävässä tarvitaan algebrallisia perustaitoja sekä ensimmäisen ja toisen asteen yhtälön ratkaisumenetelmiä.

Tehtävä 2

a) Suora kulkee pisteiden $(-2, 0)$ ja $(1, 7)$ kautta. Muodosta sen yhtälö muodossa

$$y = ax + b.$$

b) Pallon tilavuus on 1000 m^3. Laske pallon säde kolmen numeron tarkkuudella.

c) Ratkaise yhtälö $2^x = 1024$.

Ensimmäisessä kohdassa tulee käyttää suoran yhtälön yleistä muotoa ja laskea suoran kulmakerroin k. Kulmakertoimen avulla saadaan vastaus halutussa muodossa $y = ax + b$, missä $k = a$ on suoran kulmakerroin (määritelmän mukaisesti). Toisessa kohdassa tulee tietää pallon tilavuuden kaava, joka löytyy esimerkiksi maol-taulukoista. Tehtävässä törmää kolmannen asteen yhtälöön, joka ratkeaa ottamalla kuutiojuuri molemmin puolin yhtälöä. Kolmen numeron tarkkuuteen pyöristäminen tarkoittaa, että lopullisessa tuloksessa on kolme merkitsevää numeroa (esim. 4,32 tai 298; ei esimerkiksi 3434 tai 0,897). Kolmannessa kohdassa olevan eksponenttiyhtälön voi ratkaista suoraan päättelemällä, mikä kakkosen potenssi on tarpeeksi suuri toteuttamaan yhtälön tai sitten voi käyttää logaritmifunktiota ja sen laskusääntöjä. Tehtävässä tarvitaan suoran yhtälön muodostamistaitoa, pallogeometrian hallintaa ja logaritmin laskusääntöjä.

Tehtävä 3

a) Kuinka moneen järjestykseen kirjaimet A, B, C ja D voidaan asettaa?

b) Suureet x ja y ovat kääntäen verrannolliset. Jos $x = 2$, niin $y = 3$. Mikä on y:n arvo, kun $x = 5$?

Ensimmäisessä kohdassa on niin vähän vaihtoehtoja, että ne voi halutessaan laskea myös käsin. Toisaalta, voi vedota myös tuloperiaatteeseen, jolla haluttu tulos saadaan suoraan kertoman avulla. Toisessa kohdassa tulee muodostaa verrannollisuusyhtälö suureiden x ja y välille eli $x = a/y$ (a on vakiokerroin) ja laskea annetun tiedon avulla vakiokertoimen a suuruus. Kun tiedetään kerroin, voidaan laskea muuttujan y arvo kysytyssä tapauksessa. Toinen tapa ratkaista tehtävä on kirjoittaa verranto alku- ja lopputilan välille, josta vakiokerroin a on supistunut pois ja laskea tulos suoraan. Tehtävän ensimmäinen kohta vaatii kombinatoriikan perusteita, toinen kohta kääntäen verrannollisuuden käsitettä.

Tehtävä 4 Lentokokeen käyttökustannuksista polttoaineen osuus on 35 %. Kuinka monta prosenttia polttoaine voi kallistua, ennen kuin käyttökustannukset kasvavat 10 %? Anna vastaus promillen tarkkuudella.

Tehtävässä kannattaa lähteä liikkeelle siten, että kirjoittaa yhtälön polttoaineen käyttökustannusten vaikutukselle lentokoneen kokonaiskäyttökustannuksiin. Merkitään kokonaiskäyttökustannuksia symbolilla a, jolloin polttoainekustannusten osuus on $0,35a$. Kun kokonaiskustannukset kasvavat 10 prosenttia, niin niiden suuruudeksi tulee $1,10a$. Jos polttoainekustannusten osuuden kasvua merkitään x:llä, niin saadaan yhtälö

$$a + 0,35ax = 1,10a,$$

josta haluttu prosenttiosuus saadaan muodossa $100 \cdot x$.

Tehtävä 5 Suunnistajat Liisa ja Pia lähtivät yhtaikaa rastilta A ja juoksivat suoraan länteen 800 m, minkä jälkeen heidän reitinvalintansa erosivat. Liisa kääntyi etelään ja juoksi 400 m pisteeseen B, josta hän jatkoi suoran AB suuntaan 1500 m ja päätyi rastille C ajassa 20 min 30 s. Pia jatkoi ensin länteen ja kääntyi sitten etelään niin, että päätyi suoraan rastille C 3 min 20 s Liisan jälkeen. Määritä Liisan ja Pian reittien pituudet ja kummankin keskinopeus yksikkönä km/h.

Kannattaa aloittaa piirtamällä mallikuva, johon nimetään pari apupistettä (pisteet, joissa Pian ja Liisan tiet eroavat ja Pia kääntyy suoraan etelään). Saadaan kaksi yhdenmuotoista kolmiota, joista voimme laskea Liisan ja Pian reittien pituudet. Yhdenmuotoisuuden voi perustella esimerkiksi siten, että kolmioiden kaikki kulmat ovat yhtä suuria. Koska tiedämme matkoihin käytetyt ajat, voimme suoraan laskea keskinopeudet kaavan $v = s/t$ mukaan, missä s on kuljettu matka ja t on matkaan käytetty aika.

Tehtävä 6 Kupari-nikkeliseoksessa on 75 % kuparia ja 25 % nikkeliä. Toisessa kuparinikkeliseoksessa on kuparia 80 % ja nikkeliä 20 %. Näistä valmistetaan sulattamalla 300 g kuparinikkeliseosta, jonka nikkelipitoisuus on 22 %. Kuinka paljon kumpaakin seosta tähän tarvitaan?

Tehtävässä kannattaa merkitä ensimmäisen seoksen tarvittavaa määrää symbolilla x ja toisen seoksen määrää symbolilla y. Nämä yhdessä muodostavat tarvittavan kokonaismäärän eli 300 g. Annetusta nikkelipitoisuudesta voidaan laskea tarvittava nikkelin määrä grammoissa, ja kirjoittamalla yhtälö seosten nikkelipitoisuuksille kerrottuna tarvittavilla määrillä ks. seosta saadaan määritettyä muuttujien x ja y arvot. Huomaa, että $y = 300 - x$.

Tehtävä 7 Neliöpohjaisen suoran pyramidin korkeus on 8 ja pohjasärmän pituus 12. Määritä pyramidin sivutahkon ala. Kuinka suuren kulman pyramidin sivusärmä muodostaa pohjatahkon kanssa? Ilmoita kulma 0,01 asteen tarkkuudella.

Sivutahkon ala saadaan, kun lasketaan ks. kolmion ”korkeus” eli etäisyys pyramidin sivutahkon keskeltä sen huipulle ja kerrotaan se sivusärmän pituudella. Korkeus saadaan suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseella, sillä pyramidin korkeus ja pohjasärmän pituus on annettu. Sivusärmän ja pohjatahkon välisen kulman laskemiseksi tarvitaan neliöpohjan lävistäjä, joka saadaan myös Pythagoraan lauseella. Kulma saadaan laskettua pohjatahkon lävistäjän puolikasta ja pyramidin korkeutta vastaavasta kolmiosta tangentin avulla.

Tehtävä 8 Millä vakion a arvolla suorat

$$y = -3x + 2 \text{ ja } y = ax + 6$$

erottavat x-akselista janan, jonka pituus on 3?

Kannattaa aloittaa laskemalla ensimmäisen suoran ja x-akselin leikkauspiste ja päätellä sen jälkeen, missä pisteessä jälkimmäisen suoran tulee leikata x-akseli. Näitä mahdollisia kohtia on luonnollisesti kaksi, ja ne ovat kolmen yksikön etäisyydellä suoran $y = -3x + 2$ ja x-akselin leikkauspisteestä. Sijoittamalla nämä lasketut arvot suoran $y = ax + 6$ yhtälöön saadaan kaksi mahdollista ratkaisua kertoimelle a.

Tehtävä 9 Helsingin Pasilassa sijaitsee linkkitorni, jonka korkeus meren pinnasta mitattuna on 146 metriä. Kuinka korkealta paikalta Tallinnasta tornin huippu on mahdollista nähdä, kun Helsingin ja Tallinnan välinen etäisyys maapallon pintaa pitkin mitattuna on 85 km? Maapallon ympärysmitta on 40000 km.

Tehtävässä pääsee parhaiten alkuun piirtämällä mallikuvan maapallosta ja kaupunkien paikoista sen pinnalla. Havaitaan, että kuvaan muodostuu kaksi suorakulmaista kolmiota, joista toisen hypotenuusan osa on juuri kysytty korkeus. Tehtävässä tulee laskea kaupunkien välinen kulma maapallon keskipisteestä mitattuna. Maapallon säde annetusta ympärysmitasta saadaan jakamalla 2π:llä. Helsinkiä vastaava kulma ”pystysuoraan” suuntaan nähden mitattuna voidaan laskea annetun korkeuden ja maapallon säteen avulla.

Tehtävä 10 Lukujonon ensimmäinen termi on 2, ja jonon kukin seuraava termi on aina 5 % suurempi kuin edellinen termi. Muodosta jonon n:nnen termin lauseke. Tutki tämän avulla, kuinka moni jonon termeistä on pienempi kuin 1000 miljoonaa. Laske näiden termien summa kolmen numeron tarkkuudella.

Lukujono on geometrinen, ja jonon summa on täsmälleen sama asia kuin sarjan summa. Näin ollen kaikki geometrisen sarjan summakaavat pätevät tutkittavalle sarjalle. Kannattaa merkitä jonon mielivaltaista termiä esimerkiksi symbolilla x, jolloin seuraava termi on muotoa $1,05x$. Havaitaan, että geometrisen sarjan suhdeluku on 1,05 ja koska ensimmäinen termi oli 2, voidaan helposti määrittää n:s termi. Seuraavaksi asetetaan yhtälö, jonka mukaan n:nnen termin tulee olla pienempää kuin miljardi. Yhtälö ratkeaa käyttämällä logaritmin laskusääntöjä. Kun termien määrä on tiedossa, saadaan niiden summa laskettua suoraan geometrisen sarjan summakaavalla.

1.4 Kevät 2009

Tehtävä 1

a) Muodosta polynomien

$$-x^2 + 2x \text{ ja } 2x^2 - 3x + 1$$

summa ja tulo.

b) Ratkaise yhtälö

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = x - 1.$$

c) Ratkaise yhtälöryhmä $x + y = 1$, $x - y = 2$.

Ensimmäisessä kohdassa lasketaan kaksi polynomia yhteen eli saman asteen termit (sama muuttujan x potenssi) summataan yhdeksi saman asteluvun termiksi. Sen lisäksi polynomit kerrotaan keskenään algebran laskusääntöjen mukaisesti. Toisessa kohdassa ratkaistaan ensimmäisen asteen yhtälö siirtelemällä termejä ja kertomalla yhtälön molempia puolia sopivalla luvulla. Kolmannessa kohdassa tulee ratkaista toisesta annetusta yhtälöstä jompi kumpi muuttuja toisen avulla ja sijoittaa se jäljelle jääneeseen yhtälöön, jolloin saadaan tavallinen ensimmäisen asteen yhtälö ja voidaan ratkaista yhtälön tuntematon. Toinen tuntematon saadaan sijoittamalla takaisin ensimmäiseen yhtälöön (yhtälöparin ratkaisu).

Tehtävä 2

a) Suureet x ja y ovat suoraan verrannolliset. Kun $x = 2$, on $y = 5$. Mikä on suureen y arvo, kun $x = 7$?

b) Määritä funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$ derivaatan nollakohdat.

c) Laske lausekkeen $\frac{2x-1}{x+1}$ arvo, kun $x = \frac{5}{8}$.

Ensimmäisessä kohdassa suoraan verrannollisuuden käsite tulee osata, eli $x = ay$ jollekin vakiolle a ja niin edelleen. Toisessa kohdassa on mekaanista polynomin derivointia, jonka jälkeen tulee ratkaista jäljelle jäävä toisen asteen yhtälö (kaksi ratkaisua eli kaksi nollakohtaa). Kolmannessa kohdassa sijoitetaan annettu muuttujan x arvo lausekkeeseen, jolloin tarvitaan murtolukujen algebraa lausekkeen sieventämiseen (sekä luonnollisesti myös tilanteeseen sopivaa laventamista ja supistamista).

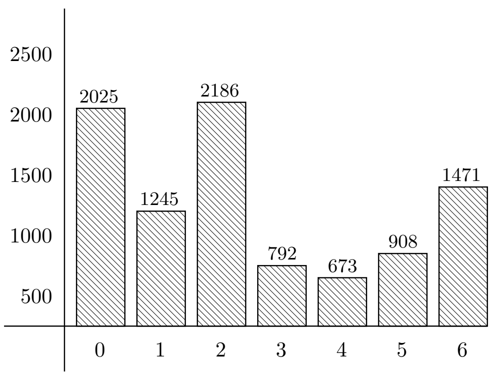
Tehtävä 3

a) Suoran kulmakerroin on $-\frac{1}{3}$, ja suora kulkee pisteen $(-1, 2)$ kautta. Esitä suoran yhtälö muodossa $y = kx + b$.

b) Tutki, millä muuttujan x arvoilla polynomi $2x^2 + 5x - 3$ saa negatiivisia arvoja.

Ensimmäisessä kohdassa kannattaa käyttää suoran yhtälön yleistä muotoa $y - y_0 = k(x - x_0)$, johon sijoittamalla annetut arvot saa esitettyä suoran yhtälön vaaditussa muodossa. Toisessa kohdassa havaitaan, että kyseessä on ylöspäin aukeava paraabeli, jonka nollakohdat eli käyrän ja x-akselin leikkauspisteet tulee laskea toisen asteen yhtälöstä. Näiden nollakohtien väli on alue, jossa ks. polynomi saa negatiivisia arvoja.

Tehtävä 4 Alla oleva pylväsdiagrammi (kuva 3) esittää kevään 2007 lyhyen matematiikan ylioppilaskokeen tehtävän 8 pistejakaumaa (vaaka-akselilla pisteet, pylväiden korkeus osoittaa kyseisen pistemäärän saaneidan lukumäärän). Laadi vastaava sektoridiagrammi, josta ilmenee kunkin pistemäärän saaneiden suhteellinen osuus, ja ilmoita osuudet prosentteina.



Kuva 3: Tehtävän 4 kuva

Sektoridiagrammin piirtämisharjoitus. Lasketaan jokaisen arvosanan saaneiden prosenttiosuus kaikkien osallistuneiden määrästä ja sitä vastaava kulma (sektoridiagrammissa täytetään kokonainen ympyrä eli 360°). Kun piirretään mallikuva, niin piirrettävien kulmien tarkkuudeksi riittää 1 aste (tämän tarkempaan ei asteviivaimella pysty). Kulmien tarkat arvot on syytä ilmoittaa 0,1 asteen tarkkuudella.

Tehtävä 5 Kaupunkeja A ja B yhdistää 170 kilometriä pitkä maantie. Alpo lähtee A:sta klo 8.20 ajamaan kohti B:tä keskinopeudella 120 km/h. Berit lähtee B:stä klo 8.35 ajamaan kohti A:ta keskinopeudella 105 km/h. Kuinka kaukana A:sta ja mihin aikaan Alpo ja Berit kohtaavat? Muodosta sopiva yhtälö ja ratkaise se.

Tilanteesta kannattaa piirtää mallikuva ja merkitä siihen kaikki tarvittavat etäisyydet. Fysiikan liikeopin mukaan

$$\text{matka} = \text{keskinopeus} \times \text{aika}.$$

Voimme ajatella esimerkiksi niin, että kuinka kauan Alpon ja Beritin yhteenlasketulta nopeudelta kestää kulkea se matka, joka on heidän välillään Beritin lähtiessä matkaan. Tämä matka on lyhyempi kuin 170 kilometriä, sillä Alpo ehtii ajaa 15 minuuttia A:n ja B:n välistä matkaa ennen kuin Berit alkaa liikkua. Tämä tulee huomioida yhtälöä muodostettaessa siten, että Beritin käyttämä aika on lyhyempi kuin Alpon käyttämä aika. Jos Alpon aikaa (kohtaamispisteeseen tullessa) merkitään symbolilla t, niin silloin Beritin aika olisi $t - \frac{1}{4}$, jos aika on ilmoitettu tunneissa ($\frac{1}{4}$ tunti = 15 min). Koska nopeudet on annettu yksiköissä km/h, niin myös aika tulee ilmoittaa tunneissa. Edellisen havainnon perusteella voidaan kirjoittaa seuraava yhtälö kohtaamisajalle t:

$$120t + 105(t - \frac{1}{4}) = 170$$

Tehtävä 6 Kuparipallon ympärysmitta on 64,2 cm ja massa 37,9 kg. Tutki, onko pallon sisällä tyhjää tilaa. Kuparin tiheys on 8,96 g/cm^3.

Kuparipallon sisällä on tyhjää tilaa, mikäli kuparipallon annettu massa on pienempi kuin umpinaisen kuparipallon massa (joka lasketaan luonnollisesti tiheys × tilavuus). Ympärysmitan avulla saamme säteen, ja edelleen voimme pallon tilavuuden kaavalla laskea kuparipallon tilavuuden. Vertaamalla massoja saamme lopputuloksen.

Tehtävä 7 Neljäkkään (vinoneliön) sivun pituus on 8,0 cm. Lyhyempi lävistäjistä on 4,0 cm pitkä. Laske pitemmän lävistäjän pituus.

Neljäkkään lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, joten piirtämällä mallikuva saadaan kaksi kappaletta suorakulmaisia kolmioita. Pythagoraan lauseen avulla saamme laskettua kysytyn pidemmän lävistäjän pituuden.

Tehtävä 8 Opintorahaa saanut opiskelija saattoi vuonna 2006 tehdä kunnallisverotuksessa ansiotulosta opintorahavähennyksen, jonka suuruus laskettiin seuraavasti: Vähennyksen enimmäismäärä oli 2200 euroa, ja sitä pienennettiin 50 prosentilla siitä määrästä, jolla puhtaan ansiotulon määrä ylitti vähennyksen enimmäismäärän. Kuitenkin vähennys oli enintään opintorahan suuruinen. Piirrä kuvaaja, joka osoittaa vähennyksen riippuvuuden palkkatulosta, kun opintorahan suuruus on 1500 euroa. Oletetaan, että puhdas ansiotulo muodostuu palkkatulosta ja opintorahasta. Miten suurilla palkkatuloilla vähennystä ei tässä tapauksessa enää saa?

Tehtävässä tulee huomata sanamuoto, eli puhdas ansiotulo tarkoittaa itse asiassa palkkatulon ja opintorahan yhteismäärää (ei pelkästään palkkatuloa). Jos palkkaa merkitään symbolilla P, niin puhdas ansiotulo on $1500 + P$. Kun $P \leq 700$ €, niin puhtaan ansiotulon määrä on pienempi kuin maksimivähennys, joten vähennykseksi tulee minimi luvuista $\{1500 + P, 1500\}$ eli 1500 € (vähennys voi olla korkeintaan opintorahan suuruinen). Kun $P \geq 700$ €, niin vähennyksen suuruus alkaa riippua tulojen määrästä. Tämä riippuvuus tulee huomioida vähennyksen lausekkeessa, joka muodostetaan vähentämällä maksimivähennyksestä palkkatulosta riippuva osa (tälle tulee muodostaa sopiva lauseke). Huomaa, että jostakin palkkatulon arvosta eteenpäin vähennyksen suuruus menee nollaan eli liian suuret tulot estävät vähennyksen tekemisen.

Tehtävä 9 Kolmion kärjet ovat pisteissä $(-6, 1)$, $(0, 0)$ ja $(4, 9)$.

a) Laske kolmion kulmat asteen kymmenesosan tarkkuudella.

b) Laske kolmion pinta-ala yhden desimaalin tarkkuudella.

Piirtämällä kolmio koordinaatistoon ja piirtämällä myös sen ympärille sopiva suorakulmio (apukuvio) saadaan joukko suorakulmaisia kolmioita, joihin voidaan soveltaa perustrigonometriaa. Näin saadaan laskettua kaikki kulmat. Trigonometrian lisäksi tarvitaan kolmion kulmien summaa (180 °). Toisessa kohdassa käytetään edelleen hyväksi suorakulmaisia apukolmioita ja määritetään ala niiden avulla (kanta $\times$ korkeus jaettuna kahdella). Tehtävässä tulee huomioida se, että kuvasta ei saa suoraan lukea kulmien suuruuksia silmämääräisesti (jokin kulma "näyttää" suoralta), vaan kulmat pitää laskea trigonometrialla.

Tehtävä 10 Suorakulmion yksi kärki on origossa, toinen pisteessä $(x, 0)$, $0 \leq x \leq 4$, ja kolmas paraabelilla $y = 4x - x^2$. Muodosta suorakulmion alan lauseke x:n avulla ja määritä alan suurin arvo.

Suorakulmion ala lasketaan tavallisesti kanta $\times$ korkeus. Nyt kanta ja korkeus ovat riippuvaisia toisistaan siten, että kannan pituus on x ja korkeuden puolestaan antaa funktio $4x - x^2$. Mallikuva esimerkiksi laskimella piirrettynä voi auttaa hahmottamaan asiaa. Suorakulmion pinta-alaa kuvaa näin ollen lauseke $A(x) = 4x^2 - x^3$, ja alan suurin arvo saadaan alafunktion derivaatan nollakohdissa tai funktion määrittelyvälin päätepisteissä (derivoimalla saadaan toisen asteen yhtälö, jolla on kaksi nollakohtaa).

2 Tehtävien vastaukset

2.1 Kevät 2007

1. **a)** $x = -\frac{1}{120}$
   b) $x = -\frac{4}{7}$ tai $x = \frac{1}{7}$
   c) a^2
2. **a)** $18,43°$ ja $71,57°$
   b) $x^2 + 3x - 4$
   c) $\frac{8}{27}$
3. **a)** 7,29 m ja 4,42 m
   b) 8,52 m
4. 9,65 %
5. **a)** $y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$
   b) piste ei ole suoralla
6. **a)** $x = 0$
   b) $x = \pm\sqrt{2}$
7. Etäisyys 2600 m ja aika 39 s.
8. Suurin arvo $\frac{14}{27}$ ja pienin -54.
9. 15,4 %
10. 63 erilaista merkkiä

2.2 Syksy 2007

1. **a)** $x = 0$ tai $x = -\frac{3}{7}$
   b) $x = 4$
   c) $\frac{2}{x^2-1}$
2. **a)** $27,04°$ ja $62,96°$
   b) $6021x^{2006} - 180x^{11} + 2$
   c) 28
3. Ydinsähkön osuus 38,2 % ja tuontisähkön 13,8 %
4. Leikkauspiste on $(-1, -5)$ ja suoran yhtälö on $3x - 2y = 7$
5. 300 g
6. 4,82 m
7. 0,42 mm
8. Maalia A tarvitaan 22 litraa ja maalia B 12 litraa
9. 44 ruutua
10. Annetut epäyhtälöt toteuttavat pisteet ovat kolmion sisällä, jonka kärjet ovat pisteissä (2,0), (4,2) ja (0,7).

2.3 Kevät 2008

1. **a)** $x = 0 \pm 1$
   b) $x = y = \frac{1}{3}$
   c) $\frac{5}{7} > \frac{6}{9}$
2. **a)** $x = -\frac{1}{7}$
   b) Mediaani on 3, keskiarvo 4.
   c) $\frac{2}{3}$
3. **a)** Rinteen pituus on 1480 m ja aikaa kuluu 14 min 50 s
   b) $56,3°$
4. 189 cm
5. 2 h 13 min 20 s
6. Intensiteetti kasvoi 1010 %
7. Pallon maksimikorkeus 11,4 m, lentorata on laskeva aikavälillä 8 s – 16,7 s
8. Ainakin yksi punainen pallo todennäköisyydellä 0,9161, kaikki samanvärisiä todennäköisyydellä 0,0842
9. 21,7 %
10. $a = -\frac{3}{4}$, $b = \frac{9}{4}$, $c = 0$, $d = -2$

2.4 Syksy 2008

1. **a)** $x = -\frac{3}{2}$

   b) $x = -3$

   c) $\frac{13}{6}x - 2y$

2. **a)** $y = \frac{3}{7}x + \frac{14}{3}$

   b) 6,20 m

   c) $x = 10$

3. **a)** Järjestysten määrä on 4! eli 24

   b) $y = \frac{6}{5}$

4. 28,6 %

5. Liisan reitti 2,7 km ja keskinopeus 7,9 km/h. Pian reitti 3,2 km ja keskinopeus 8,1 km/h

6. Ensimmäistä seosta 120 g ja toista seosta 180 g

7. Sivutahkon ala on 60. Sivusärmä muodostaa pohjatahkon kanssa $43,31°$ kulman

8. Arvolla $a = -\frac{18}{11}$ ja $a = \frac{18}{7}$

9. 138 metrin korkeudelta

10. n:s termi on $2 \cdot 1,05^{n-1}$, 411 termiä alittaa 1000 miljoonaa ja näiden termien summa on $2,046 \cdot 10^{10}$

2.5 Kevät 2009

1. **a)** $x^2 - x + 1, -2x^4 + 7x^3 - 7x^2 + 2x$

   b) $x = \frac{6}{5}$

   c) $x = \frac{3}{2}, y = -\frac{1}{2}$

2. **a)** $y = \frac{35}{2}$

   b) $x_1 = 0, x_2 = 4$

   c) $\frac{2}{13}$

3. **a)** $y = -\frac{1}{3}x + \frac{3}{5}$

   b) $-3 < x < \frac{1}{2}$

4. Prosenttiosuudet sektoridiagrammissa ovat 1/13,4; 2/23,5; 3/8,5; 4/7,2; 5/9,8; 6/15,8; 0/21,8

5. 104,7 km; klo 9.12

6. On tyhjää tilaa (täyttä kuparia oleva pallolla on suurempi massa)

7. 15,5 cm

8. Kun $700 < P \leq 2100$, niin vähennys on 1500. Kun $2100 < P \leq 5100$, niin vähennys riippuu palkkatulon suuruudesta. suuremmilla palkkatuloilla vähennystä ei saa lainkaan.

9. **a)** $104,5°; 48,1°; 27,4°$

   b) ala 29 (tasan)

10. $A(x) = x(4x - x^2)$, $\frac{256}{27} \approx 9,48$